Praktische Geodäsie.

Erster Band.

Vereinfachte und vervollkommnete

Praktische Geodäsie

zum Gebrauche

der Civil- und Militär-Ingenieurs, des Brücken- und Wege-Baues, des Bergwerkswesens, der Geometer des Katasters, der vereideten Experten und Geometer, und aller Personen, welche sich mit Plänen und geographischen Karten, mit der Drainage, dem Theilen und Begränzen der Aecker beschäftigen;

von

J. A. Laur,

Professor der Geodäsie, Civil-Ingenieur, früher Ober-Geometer des Katasters, der allgemeinen Gesellschaft für Entwässerungen, Mitglied der polytechnischen Gesellschaft, der Akademie der Künste und Gewerbe ꝛc. ꝛc. in Paris.

Aus dem Französischen übertragen

von

O. Strubberg,

Hauptmann im k. preuß. großen Generalstabe.

Erster Band.

Mit acht Tafeln.

Autorisirte und vom Verfasser mit einem Anhange über Nivellements, Entwässerungen ꝛc. vermehrte Uebersetzung der sechsten Original-Ausgabe.

Leipzig,

Druck und Verlag von Breitkopf und Härtel.

1857.

Vorwort des Uebersetzers.

Indem der vorliegende erste Band eines französischen Werkes über praktische Geodäsie hiermit in deutscher Uebertragung demjenigen Theile des Publikums übergeben wird, der sich aus Beruf oder aus Neigung mit dem Gegenstande des Buches beschäftigt, glaubt der Uebersetzer, die Aufmerksamkeit der geehrten Leser auf einige Punkte lenken zu müssen.

Der Herr Verfasser des Werkes hat, bei einer besonderen Befähigung für geodätische Studien und bei einer ungewöhnlichen Vorliebe für alle mathematischen und geodätischen Arbeiten, während einer sehr langen Reihe von Jahren dem Studium die praktische Erfahrung beigesellen, diese durch jenes befruchten und veredeln, so wie umgekehrt das Erstere für die Letztere leitend werden lassen können. Er hat in den ausgedehnten praktischen Vermessungen und Arbeiten, die er selbstständig in Frankreich, Belgien, Italien und Spanien geleitet, einen reichen Schatz von Erfahrungen gesammelt, und hieraus sowohl, als auch aus den Erfahrungen, welche er bei dem Vortrage und Unterrichte an verschiedenen Spezial-Schulen gewonnen, erkannt:

einmal, in welcher Weise durch geeignete Instrumente die geodätischen Operationen verbessert und

erleichtert, und wie mittelst derselben die Arbeiten mit geringerem Aufwande an Zeit und Mitteln, als bisher, bewirkt werden können, und

zweitens, in welcher Art die Theorie der Praxis — der wissenschaftliche Unterricht der technischen Ausführung — eine Hülfe und Unterstützung zu gewähren im Stande sind.

Hieraus ist, nach einem langen und ehrenvollen praktischen Berufsleben, die gegenwärtige doppelte Thätigkeit des Herrn Verfassers entstanden. Er hat geodätische Instrumente nach eigener Idee erfunden, oder verbessert, vereinfacht und vervollkommnet, — und er hat, nach dem Gange seiner Vorträge, den rein wissenschaftlichen Theil seiner Beschäftigungen in Druckschriften einem größeren Publikum vorgelegt.

Beide Arten der Thätigkeit des Herrn Verfassers, sowohl die Anfertigung, Verbreitung und Einführung der selbsterfundenen Instrumente und deren zweckmäßiger Benutzung, so wie die Vereinfachung der Theorie, welche diese beste Benutzung motivirt und mit ihr im innigen Zusammenhange steht, — lassen sich aber nicht vereinzeln, Instrumente und Druckschriften ergänzen und bedingen einander, und darum müssen jene in diesen auch eine eingehende Besprechung finden.

Ein Resultat nun der schriftstellerischen Thätigkeit des Herrn Verfassers liegt dem verehrlichen Publikum in dem vorliegenden ersten Bande der vereinfachten und vervollkommneten praktischen Geodäsie vor, dem in wenigen Wochen der zweite Band folgen soll; und es wird, da bereits sechs frühere Ausgaben in französischer Sprache in einem verhältnißmäßig kurzen Zeitraume erschienen sind, hier keiner besonderen Hinwei-

sung auf den inneren Werth des Buches, der in weiten Kreisen anerkannt worden ist, bedürfen.

Es möge hier nur die Bemerkung Platz finden, daß das vorliegende Buch nicht ein systematisches Lehrbuch der gesammten Geodäsie ist, und auch nicht die Prätension hat, Alles geben und lehren zu wollen. Es ist ein Handbuch der praktischen Geodäsie (im Gegensatze zu der höheren), das in zweckmäßiger Weise nur diejenigen Sachen in sein Gebiet zieht, die mit der Erreichung bestimmter praktischer Zwecke, mit der Lösung bestimmter praktischer Aufgaben im engen Zusammenhange stehen, und alle diejenigen wissenschaftlichen Sätze, Untersuchungen und Digressionen bei Seite läßt, welche diesen praktischen Zwecken fremd bleiben.

Dadurch wird dem Buche der Charakter eines Compendiums von wissenschaftlicher Vollständigkeit genommen, und ihm der andere eines praktischen wissenschaftlichen Hülfsbuches aufgeprägt, das seinen Zwecken gänzlich genügt.

Insbesondere nun werden Alle, welche mit Vermessungen und mit der Kartographie, sei es zu militärischen oder staats- oder landwirthschaftlichen Zwecken, und mit den Anlagen öffentlicher Bauten (Straßen, Canäle u. dgl.), mit der Drainage u. s. w. zu thun haben, in dem Buche viel brauchbares und schätzbares Material für ihren Beruf finden; — ein ausführlicher Anhang über Entwässerungen (und Meliorationen), der besonders ein in einer Gegend Frankreichs wirklich ausgeführtes Verfahren als ein im vorkommenden Falle zu benutzendes Modell ziemlich in extenso gibt, wird noch speziell nach einer anderen Richtung hin des gegenwärtigen ersten Bandes Brauchbarkeit vermehren.

Das ist, in kurzen Worten, dasjenige, was über den inneren Werth und den Gehalt des ersten Bandes meinerseits zu sagen sein dürfte. Ich habe nur noch der äußeren Veranlassung zur Verdeutschung dieses Werkes kurz zu erwähnen.

Der Herr Verfasser, dessen geodätische Instrumente wegen ihrer Einfachheit, Genauigkeit und bequemen Gebrauchs eine immer weitere Verbreitung außerhalb der näheren Gränzen seines französischen Vaterlandes und Belgiens gefunden hatten, besuchte in der letzten Zeit mehrfach, den ihm gewordenen ehrenvollen Aufträgen der betreffenden Regierungen folgend, Deutschland, und verschaffte seinen Instrumenten, wie den von ihm vorgeschlagenen und praktisch erprobten Vermessungsmethoden mehr und mehr Eingang, besonders in Preußen und Sachsen, so wie in den anderen nord- und mitteldeutschen Staaten. Die Kenntniß der Instrumente führte zu dem nahe liegenden Wunsche, das in zwei Bänden erschienene Werk des Verfassers über praktische Geodäsie (als von der Kenntniß seiner Instrumente schwer zu trennen) in deutscher Sprache zu besitzen und dadurch es einem größeren Publikum zugänglich zu machen.

Unter den Männern von wissenschaftlicher Bedeutung, welche sich in Preußen besonders für des Herrn Verfassers Instrumente und für sein geodätisches Werk interessirten, nahm der Königliche Herr Generalmajor Baeyer, der durch seine eigenen Leistungen auf dem Gebiete der höheren Geodäsie, durch seine langjährige Direction des trigonometrischen Bureaus des Generalstabes, durch seine ausgedehnten Triangulirungen des preußischen Staats, so wie durch seine wissenschaftlichen Arbeiten und durch seine Stellung in der militärischen

und gelehrten Welt überhaupt ein vollgültiger und gewichtiger Richter ist, sich des Herrn Verfassers mit warmem Eifer an. Er veranlaßte den Unterzeichneten zur Uebertragung des Werkes aus dem Französischen in's Deutsche, und kam darin des Herrn Verfassers, so wie der Herren Verleger eigenen Wünschen, mit dankenswerther Bereitwilligkeit entgegen.

Dieser äußeren Anregung zunächst nun verdanke ich die Gelegenheit zu einer genaueren Kenntniß des Werkes und seines Verfassers, — und ich hoffe und wünsche, daß diese Uebersetzung, als eine geringe Mitwirkung von meiner Seite, dazu beitragen möge, den Instrumenten, wie dem Werke, in Deutschland, an Schulen sowohl, als in den Händen der Privaten und Berufsmänner, den verdienten Eingang und die wünschenswerthe Verbreitung zu verschaffen.

Berlin, im September 1856.

O. Strubberg,

Hauptmann im Königlich Preußischen großen Generalstabe.

Einleitung.

Die praktische Geodäsie lehrt, topographische Pläne und Karten aufzunehmen und räumliche Ausdehnungen zu bestimmen und zu theilen. Sie ist als Wissenschaft allen Denen unentbehrlich, welche sich mit Vermessungen, Parzellirungen, Drainage, Gränzbestimmungen und der Expertise des Grundes und Bodens beschäftigen; sie ist den Notaren, wie den Geschäftsmännern im Allgemeinen, von Nutzen, und besonders von großem Interesse für die Landwirthschaft und den Ackerbau, wenn es sich darum handelt, bebaute Terrains zu nivelliren, Betriebswege zu traciren, ein regelmäßiges Berieselungssystem zu zeichnen und zu entwerfen, die Eintheilung in Schläge festzustellen, die Menge der Aussaat für die Ausdehnung und die Natur der Culturen zu bestimmen, u. s. w. Von der Topographie (der Kunst, die Karte zu zeichnen oder Terraintheile in einer horizontalen Projection darzustellen) unterstützt, bildet die praktische Geodäsie einen wesentlichen Theil der Kenntnisse der Civil- und Militär-Ingenieurs, der Offiziere vom Genie, der Agenten der directen Steuern und aller Lehrer und Professoren der Primär-Schulen. Sie sollte billiger Weise zu jeder guten Erziehung gehören, da sie dem gebildeten Manne, der seine ländlichen Besitzungen bewohnt, ein erhöhtes Verständniß der Beschaffenheit und Produktion derselben gewährt. Die große Operation des Katasters endlich basirt ganz auf ihr, weil sie alle topographischen Documente liefert, deren die verschiedenen Zweige des öffentlichen Dienstes in allen Ländern ohne Ausnahme bedürfen.

Es erscheint sonderbar, daß eine so nützliche Kunst nicht allgemeiner verbreitet gewesen sei; die Anwendung der Geodäsie war aber früher nur in den Corps des Genie, des Berg- und Hütten-, sowie

des Brücken- und Wegebaues gelehrt worden, und da diese über den anderen Verwaltungszweigen standen, ohne direkte Beziehung zu der Mehrzahl der Bevölkerung waren, sehr oft auch ohne Grundsätze und ohne Methode die Aufnahme der Pläne und analoge Operationen ausführten, so konnten die erlangten Resultate nur ungenügend und unvollkommen sein.

Die Geodäsie und Topographie wurde in Frankreich aus der früheren Isolirung, die sie zum ausschließlichen Eigenthume Einzelner gemacht hatte, durch gewaltig eingreifende Institutionen befreit und bedeutend gefördert: einmal durch die Einführung eines einzigen Systems von Maß und Gewicht, dessen Basis der Natur entnommen wurde, und die Trennung von Provinzen und Orten aufhob; — und zweitens durch die Einführung des Katasters.

Beide Einrichtungen waren von einer gebieterischen Nothwendigkeit geworden; ein glückliches Zusammenwirken mehrerer Umstände hatte die Schwierigkeiten der Einführung aplanirt, und ihre allgemeine Anwendung ward durch den Willen der Napoleonischen Regierung herbeigeführt.

Obwohl alle Regierungen, Staatsökonomen und Gesetzgeber zu allen Zeiten die Nothwendigkeit erkannt und die Mittel dazu angestrebt hatten, die Grundsteuer unter den verschiedenen Contribuenten gerecht zu vertheilen, so mußten alle Versuche an den vorhandenen Privilegien und Mißbräuchen sowohl, als an dem Mangel einer festen Grundlage scheitern, besonders aber an dem vorher zu befriedigenden Bedürfnisse, in einer unveränderlichen Weise, nach Titel und Nießbrauch der Besitzenden, die Gränzen des Eigenthums und seines steigenden oder abnehmenden Kaufwerthes zu bestimmen.

Bis zum 18. Jahrhunderte also hatte keine Regierung dies große Werk des socialen und landwirthschaftlichen Fortschrittes (eines nach allen Regeln ausgeführten vollständigen Katasters) verwirklichen und organisiren können, obwohl Friede und Sicherheit der Familien davon abhängen, die Ländereien und allgemeinen Wohlstand besitzen, und dies Werk nach den heutigen Anschauungen von Recht und Eigenthum unentbehrlich geworden war.

Die landwirthschaftliche Industrie, die Basis aller anderen Industrie, hat nicht nur allgemein durch den Mangel einer Aufmunterung zu allen inländischen Verbesserungen und Einführungen von außerhalb, welche jede Localität anzunehmen und zu acclimatisiren im Stande ist, gelitten, sondern auch durch die materiellen Mißbräuche, welche das Eigenthumsrecht beschränkten, jeden Wetteifer und jeden Fortschritt niederhielten und lähmten, — Mißbräuche, welche eine jede väterlich wohlwollende Regierung, im Interesse der Familie und des Eigenthums, abstellen müßte. Besonders nöthigt hierzu das Bedürfniß einer gerechten Vertheilung der Grundsteuern und aller Eintragegebühren für Verkäufe, Besitzveränderungen, Hypotheken rc., die häufig mit einer großen Ungleichheit vertheilt und eingenommen werden, die ihre Lästigkeit vermehrt und die Erhebung erschwert.

Ein Fortschritt darin war nur möglich, wenn man ohne Unterschied jeden Ertrag gebenden oder ertragsfähigen Besitz den öffentlichen Lasten unterwarf und nach dem genauen Verhältnisse seiner Ausdehnung und Fruchtbarkeit abschätzte.

Der Kataster allein kann die territoriale Gleichheit und die Proportionalität in Betreff der Steuern für die produktiven Terrains festsetzen und erhalten; auf geometrische Pläne sich stützend, unveränderlich die Wegegränzen, Wasserläufe, Erbtheile, in allen Unterabtheilungen, bestimmen; allmälig die gesetzlich constatirten materiellen Irrthümer berichtigen; fortschreitend alle Veränderungen, Zerstörungen, Verbesserungen und den veränderlichen käuflichen Werth anzeigen, und durch alles dieses für die Bevölkerung von großem Nutzen und von großer Bequemlichkeit werden.

Durch Napoleon ward im Jahre 1802 der Kataster eingerichtet und begonnen, und trotz aller Schwierigkeiten, mit denen eine entstehende Institution immer zu kämpfen hat, trotz des augenblicklichen Mangels an Uebung, dem Fehlen abkürzender Methoden bei den ersten Versuchen, sah man sehr bald zahlreiche Agenten des Katasters durch Eifer und Arbeit eine große Geschicklichkeit sich erwerben. Recht bedeutende Abhandlungen, ziemlich gelungene Pläne, im Großen wie im Speziellen, für die einzelnen Departements, waren die ersten

Früchte der neuen Operationen. Doch störten administrative Veränderungen und Einwirkungen längere Zeit den Fortschritt der Sache, und besonders unterbrachen die kriegerischen und politischen Ereignisse von 1813 und 14 die weiteren Arbeiten derjenigen Männer, welche im ersten Beginne so gute Erfolge gehabt hatten. Die Operationen des Katasters fanden aber bald außerhalb Frankreichs einen neuen Boden und weitere Anwendung, wie auch später einen Fortgang im eigenen Lande. Die Beamten des Katasters machten neue Untersuchungen, fanden mit Hülfe der exacten Wissenschaften neue Mittel, und andere, um so werthvollere und um so einfachere Verfahrungsarten, als sie durch eine Abkürzung der verschiedenen Operationen der Construction und der Berechnung der Pläne, auch die Ursachen zu Irrthümern verringerten. Man sah bald die praktische Geodäsie zu dem Range der modernen Wissenschaften sich erheben, und namentlich auch durch die Veröffentlichung werthvoller Entdeckungen gewinnen, zu denen wir auch die Instrumente und Verfahrungsarten unserer eigenen Erfindung rechnen können; die Praxis nahm sie sofort auf und stellte sie, in Rücksicht ihrer Einfachheit, Genauigkeit und Ersparniß an Zeit und Geld*), in den ersten Rang.

---

*) Diese Thatsachen stehen fest:

1°. durch den Rapport der Herren Lacroix, Mathieu und Cauchy an die Akademie der Wissenschaften, in ihrer Sitzung vom 11. Juni 1821, und durch die dem Autor in derselben Sitzung durch die genannte Akademie bewilligten Aufmunterungen;

2°. durch den Bericht des Königlichen Commissarius des Katasters in den der Deputirtenkammer zur Antwort gegebenen Aufklärungen über Behauptungen des Berichterstatters der Finanzcommission, welche die Unterdrückung des Katasters mit dem irrigen Factum begründen wollte, „daß die Operation, in etwa 11 Jahren auf ein Viertheil des Ganzen ausgeführt, noch bei einer jährlichen Ausgabe von 55,000,000 über 30 Jahre und 165,000,000 bis zur gänzlichen Beendigung erfordern würde", während nach den genauesten Angaben der Königliche Commissar feststellte, daß die Beendigung des Katasters nur eine Ausgabe von 97,495,177 Francs erforderte, indem die Entdeckung eines neuen Instruments bestimmt sei, die Rechnungen der Flächeninhalte zu erleichtern und abzukürzen, und in diesem Theile der Arbeit eine wichtige Ersparniß zu machen erlaube

Der Kataster wurde 1822 wieder aufgenommen und bis zu Ende geführt, — die Hoffnung einer schließlichen Organisation der Conservation, um durch stete Berichtigungen, Nachträge und Fortführungen die frühere Richtigkeit zu erhalten, blieb unerfüllt und vertagt!

Die Kataster-Operation wird also in Frankreich, wie in allen denjenigen anderen Ländern wieder begonnen werden müssen, wo sie nicht mit s. g. Conservationen, mit Fortführungen, im Interesse der Regierungen und der Eigenthümer, organisirt worden ist. Und da diese Arbeit außerdem die regelmäßigste Grundlage für Communal- und andere öffentliche Wahlen bildet, und somit von einem gewissen politischen Einflusse ist, so ist die Mitwirkung eines jeden Mannes von Fach nöthig, um, so viel als thunlich, die Operationen zu vervollkommnen und zu vereinfachen.

Das ist auch der Zweck dieser neuen Publication, welche ihrerseits dazu beitragen möge, nützliche und praktische Kenntnisse zu verbreiten.

Inhalt.

Allgemeine arithmetische und algebraische Grundzüge.

§ 1. Aus den Begriffen, welche die ersten Eindrücke dem Menschen geben, formt er eine Stufenleiter der Vergleichung, nach der Alles sich bemessen, und welcher Alles sich anpassen muß, was in der Folge in seinen Geist Eingang findet. Alle Stufen dieser Leiter heißen schlechtweg Einheiten; — dies Wort bezeichnet eine Eigenschaft, aber eine gedachte, insofern sie nur auf eine einfache Thätigkeit des Geistes sich bezieht. Da nun eine jede Eigenschaft sich unabhängig von dem Gegenstande, an dem sie haftet, betrachten läßt, so haben wir es nicht mit jedem Gegenstande im Besonderen zu thun, sondern vielmehr mit der einer sehr großen Zahl von Gegenständen gemeinsamen Fähigkeit, als Vergleichungs-Glied dienen zu können.

Wir nennen Zahlen die Resultate unserer Vergleichungen, d. h. die Beziehungen anderer Gegenstände derselben Art zu demjenigen, welchen wir als Einheit wählen. Diese verschiedenen Beziehungen nehmen die Namen zwei, drei, vier u. s. w. an, und sind ihrer Zusammensetzung nach geordnet. So ist vier aus mehr Einheiten zusammengesetzt, als drei, und folgt darum dieser letzteren Zahl; fünf enthält mehr Einheiten als vier und folgt dieser, und so fort. — Diese Beziehungen können, ebenso wie die Einheit, ganz unabhängig von der Natur der Gegenstände — also an und für sich — betrachtet werden: es wird in dem Nachfolgenden daher sich nur um Zahlen im Allgemeinen handeln und nicht um eine Zahl von Gegenständen bestimmter Natur; mit andern Worten, es wird nur von abstracten Zahlen (unbenannten Zahlen) und nicht von concreten Zahlen (benannten Zahlen) die Rede sein.

§ 2. Um die unbegränzte Reihe der Zahlen auszudrücken, hat man nur 9 Zeichen (Ziffern), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, deren jedes außer einem ursprünglichen Werthe noch durch seine Stellung eine unendliche Menge relativer Werthe haben kann. Da man diese relativen Werthe ihnen auf unendlich viel verschiedene Arten geben kann, so hat man die Stellung der Ziffern auf einer horizontalen Linie gewählt und Alles auf einen festen Anfangspunkt bezogen, so nämlich, daß man von diesem Punkte aus nach rechts und nach links eine Reihe Stellen denkt, welche nach und nach von jeder Ziffer eingenommen werden können, wobei diese bei jeder Veränderung der Stellung einen verschiedenen Werth annimmt. So lange alle Stellen, von dem festen Punkte aus, ausgefüllt sind, braucht man sie nur durch die Ziffer zu bezeichnen, welche dieselbe einnimmt. Um leere Stellen zu bezeichnen, muß man ein zehntes Zeichen wählen (die Null 0), das nur zur Ausfüllung dieser leeren Stellen bestimmt bleibt.

§ 3. Die neun ersten Zahlen haben also ihre besonderen Zeichen. — Um zehn auszudrücken, nimmt man schon seine Zuflucht zu den relativen Werthen, und, mit Ordnung verfahrend, geht man von der Ziffer Eins aus, die diese Zahl darstellen soll, sobald sie die zweite Stelle zur Linken des festen Anfangspunktes einnimmt. Nimmt die Eins diese zweite Stelle ein, und man stellt nach und nach die neun Ziffern neben sie, so erhält man neun Verbindungen und gelangt bis zur Zahl neunzehn (19). Um jetzt die zwanzig darzustellen, setzt man statt der Eins die Zwei in die zweite Stelle links vom Anfangspunkte, läßt in die erste nach und nach die neun Ziffern treten, und kommt so zu neun und zwanzig (29). Aehnlich kommt man zur 39, zur 49, und so fort, und endlich zur 99. Damit sind die Verbindungen in den beiden ersten Stellen erschöpft, und wir lassen nun die Eins an die dritte Stelle zur Linken des festen Anfangspunktes treten; wir erhalten das Zeichen für Hundert (100). Lassen wir diese Einheit so lange in ihrer dritten Stelle, bis nach und nach alle 99 vorangehenden Verbindungen neben ihr gestanden haben, so kommen

wir zu zweihundert (200), und so fort. Das Gesagte reicht hin, um das Fortschreiten der Verbindungen der zur Darstellung aller möglichen Zahlen bestimmten Zeichen darzuthun.

§ 4. Man sieht, daß die Ziffern, welche in der ersten Stelle einfache Einheiten vorstellten, in der zweiten Zehner oder Vereinigungen von zehn Einheiten darstellen, welche man als die verzehnfachten Einheiten der ersteren ansehen kann; — dann in der dritten Hunderter, oder verzehnfachte Einheiten der Zehner; in der vierten Tausender ꝛc. Man kann nun weiter gehen: nämlich, warum sollen nicht, wenn man von den Einheiten ausgeht, und die neun ersten Ziffern, die von ihnen links stehen, einen relativen Werth erhalten, der zehnmal größer ist, als ihr ursprünglicher Werth, — diese nämlichen Ziffern in einer andern Stellung, z. B. zur Rechten, einen zehnmal kleineren, als ihren ursprünglichen Werth, annehmen können? Warum sollen sie nicht, z. B. in der zweiten Stelle rechts stehend, hundertfach kleinere Einheiten darstellen, wie sie, in der zweiten Stelle links stehend, hundertfach größere Einheiten darstellen? u. s. w. u. s. w. Man hat darum, rechts der Einheiten, ein stufenweises Abnehmen angenommen, das durchaus dem stufenweisen Zunehmen nach links entspricht, so daß die Gesammtheit der Zeichen, wenn man von rechts nach links geht, ein Gesetz beständiger Zunahme (ein zehnfaches Wachsen) zeigt, dagegen, wenn man von links nach rechts geht, ein Gesetz beständiger Abnahme (ein zehntheiliges Abnehmen). Es ersieht sich daraus, warum man 12,43 ausspricht: zwölf Einheiten und drei und vierzig Hunderttheile, oder zwölfhundert drei und vierzig Hunderttheile. Die Zahlen können sich ebensowohl nach links als nach rechts von den Einheiten aus erstrecken, wie es die vorstehende thut. Wenn sie sich aber nur nach Einer Seite erstrecken, so müssen immer die Einheiten den Ausgangspunkt bilden, wenn man nicht eine neue Annahme vorher festsetzen will. Eine jede Zahl also, welche nicht das Decimal-Komma hat, wird nach rechts mit den Einern enden: wohlverstanden kann die Ziffer dieser Einheiten eben so gut die Null sein, wie jede andere Ziffer. Alle Zahlen,

welche das Decimal-Komma haben, zeigen links desselben die Ziffer der Einheiten, welche wiederum Null sein kann, so wie auch die Ziffern der Zehner, Hunderter u. s. w. Links des Komma's schreibt man übrigens die Null nur in der Stelle der Einer, wenn keine ganzen Einheiten in der Zahl vorkommen.

§ 5. Man kann fragen, warum gerade zehn statt einer andern Anzahl von Zeichen gewählt worden sind. Es ist kein anderer Grund dafür, als der Gebrauch und die allgemeine Annahme. Mit mehr oder weniger Zeichen hätte man eben so gut alle Zahlen darstellen können. Je weniger Zeichen man indessen annimmt, um so mehr sind die relativen Werthe eines jeden einander genähert: folglich wiederholen diese Zeichen sich um so öfter an den verschiedenen Stellen, sobald man eine etwas beträchtliche Zahl ausdrücken will, — weil das Gesetz des relativen Wachsens nothwendig der Zahl der angewendeten Ziffern folgt. Strenge genommen, hätten zwei Zeichen genügt, aber die Schreibweise würde dann sehr lang und unbequem geworden sein. Die Einheit hätte immerhin durch 1 dargestellt werden können, aber um zwei darzustellen, hätte man dem Zeichen 1 einen ersten relativen Werth geben müssen, 10 (wenn wir hier dieselben Annahmen, wie oben, gelten lassen). Drei würde durch 11 dargestellt worden sein; um vier zu bezeichnen, hätte man eines neuen relativen Werthes von 1 bedurft, 100 u. s. w. In dem Decimal-Systeme zeigen sich die relativen Werthe um je zehnmal größer; im zweitheiligen Systeme verdoppeln sie sich nur, im dreitheiligen würden die Einen das Dreifache der Andern sein und so fort.

Wir gehen nun zu den Zahlenverbindungen über.

Zahlen-Verbindungen.

§ 6. Addition. Will man zwei Zahlen vereinigen, so hängt die zu machende Operation (welche Addition heißt) nur von der conventionellen Schreibweise ab. Es ist klar, daß die Einheiten der-

selben Ordnung vereint werden müssen, und daß, wenn die Summme einer dieser Ordnungen eine Einheit der höheren Ordnung erreicht, wir diese Einheit natürlicher Weise in die ihr gebührende höhere Ordnung bringen müssen.

§ 7. Subtraktion. Ist eine Zahl von einer andern hinwegzunehmen, so können wir nur jede Art von Einheiten von den Einheiten derselben Ordnung hinwegnehmen. Es versteht sich hierbei, daß in der zu verringernden Zahl wir in jeder Stelle so viel Einheiten als wir wollen hervorbringen können, indem wir einige Einheiten der höheren Ordnung zerlegen.

§ 8. Multiplikation. Wir können eine bestimmte Zahl eine gewisse Zahl Male wiederholen, oder, anders gesagt, eine Zahl durch eine andere vervielfältigen wollen. Wenn wir sagen, eine gewisse Zahl Male, so vergesse man nicht, daß Zahl ebensowohl eine Gesammtheit ganzer Einheiten, als auch eine Gesammtheit von Theilen von Einheiten, die wir als kleinere Einheiten ansehen können, bedeutet; 0,7 ist eben so gut eine Zahl, als 7 es ist. Es ist folglich über die Multiplikation die wichtige Bemerkung zu machen, daß sie nicht immer eine Vermehrung hervorbringt. Wenn wir z. B. eine Zahl mehrere Zehntel Mal wiederholen, so muß das Resultat nothwendig kleiner sein als diese Zahl, indem, um das Produkt zu bilden, wir sie nicht ein einziges Mal ganz nehmen. Der Ausdruck wiederholen, allgemein angewendet, um Vermehrung zu bezeichnen, kann leicht zu Irrungen führen, wenn man nicht vorsichtig ist; jedes Mal nun, daß hier von Multiplikation die Rede sein wird, glaube man nicht von vorn herein, daß das Resultat größer sein müsse, als die zu multiplicirende Zahl. Als Beispiel einer durch die Vervielfältigung bewirkten Verminderung diene das folgende: 7 soll fünf Zehntheil mal genommen, oder mit 0,5 multiplicirt werden: dies heißt so viel als fünf Zehntheil von jeder Einheit von 7 nehmen, oder jede Einheit durch fünf Zehntheile ersetzen. Das Resultat ist demnach sieben mal fünf Zehntheil, oder 3,5, also kleiner als 7.

Die Multiplikationsweisen in den beiden Fällen, der ganzen und der Decimal-Zahlen, als bekannt voraussetzend, halten wir uns hierbei nicht auf; wir wollen nur noch bemerken, daß die Elemente der Multiplikation die Faktoren des Resultats heißen, und daß ein aus zwei gleichen Faktoren zusammengesetztes Resultat eine zweite Potenz, oder das Quadrat der Faktor-Zahl genannt wird. Auf diesen Gegenstand werden wir später zurückkommen.

§ 9. Division. Wir können endlich eine Zahl zu dividiren (zu theilen) haben, wie der gebräuchliche Ausdruck es nennt. Aber wir dürfen uns nicht durch die Worte theilen, dividiren, die gewöhnlich Verminderung bedeuten, irre führen lassen. Die aus einer Division hervorgehende Zahl (der sogenannte Quotient) kann größer sein, als die getheilte Zahl. Nämlich: Wir untersuchen, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist; nun kann der Divisor eine nur aus Theilen der Einheit, z. B. aus Zehntheilen, zusammengesetzte Zahl sein, alsdann wird er in dem Dividendus mehr Male enthalten sein, als die Einheit selbst. Das Resultat oder der Quotient wird also größer sein als der Dividendus. Ist z. B. 24 durch 0,5 zu dividiren, so untersucht man, wie viel mal 0,5 enthalten ist, zunächst in jeder besonderen Einheit, dann in jeder Zahl von Einheiten. Es ist zwanzig mal in jeder Zehn, folglich vierzig mal in beiden Zehn (in Zwanzig) enthalten; es findet sich zwei mal in jeder Einheit, die 4 enthält es also 8 mal; das Resultat ist 48, eine Zahl also, die größer ist als 24.

Wir dürfen die Division nur als ein Mittel ansehen, eine Zahl in zwei, gemeiniglich ungleiche Faktoren, deren einer gegeben ist, zu zerlegen: eine Zerlegung, welche man immer als möglich ansieht. Meistentheils ist der zweite Faktor keine ganze Zahl. Aber, wird man sagen, wenn dieser Theil ein Bruch ist, wenn er einen Decimaltheil enthält, so müßte das Resultat oder der Dividendus ebenso beschaffen sein. Das ist richtig. Ist aber das Produkt zweier Decimalzahlen nicht oft eine ganze Zahl? Bietet sein decimaler Theil oft nicht bloß Nullen? — Man gebe nun dem Dividendus diese, nur beim Schreiben

weggelassenen, Nullen, deren Gegenwart unentbehrlich ist, um die Zerlegung zu bewirken. Vorausgesetzt, der Quotient bestehe aus Zehnteln, so muß man Eine Null ergänzen, und kann dann, die Operation fortsetzend, die Ziffer der Zehntel wiederfinden. Bleibt noch ein Rest, so müssen wir die im Dividendus verschwundene Null der Hunderttheile dort wiederherstellen, um die Hunderttheile des Quotienten wiederzufinden. Dieses Verfahren so weit fortsetzend, als man will, kann man eine von dem wahren Quotienten unendlich wenig verschiedene Zahl erhalten.

Von den vier Operationen, welche so eben nach einander betrachtet worden sind, gibt die erste beständig Vermehrung, die zweite Verminderung; die dritte und vierte dagegen geben bald Vermehrung, bald Verminderung.

§ 10. Quadrat- und Primzahlen. Im Vorhergehenden haben wir eine Art der Zusammensetzung berührt, in welche nur zwei gleiche Faktoren eintreten. Man kann alle Zahlen als in dieser Weise zusammengesetzt betrachten, und also alle als einer Zerlegung fähig ansehen. Diese Zerlegung, deren Gang wir zeigen werden, wird die Zahlen in zwei Klassen theilen: die erste wird alle in gleiche ganze Faktoren zerlegbare Zahlen umfassen, — man nennt sie vollkommene Quadrate. Die zweite Klasse dagegen wird alle diejenigen in sich schließen, welche nicht anders als in zwei gleiche bruchtheilige Faktoren zu zerlegen sind. Diese zweite Klasse zeigt eine fernere Theilung: ein Theil der Zahlen, welche sie umfaßt, wird in ungleiche ganze Faktoren zerlegbar sein; der andere Theil wird diese Eigenschaft nicht haben, und hat darum den Namen der Primzahlen bekommen.

Wir wollen uns jetzt mit der Zerlegung der Zahlen in zwei gleiche Faktoren beschäftigen, d. h. mit dem Ausziehen der Quadratwurzel.

§ 11. Wurzel-Ausziehung. Die Bildung der zweiten Potenz hat keine Schwierigkeit; anders ist es mit der Zerlegung derselben.

Betrachten wir einmal im Einzelnen die Bestandtheile eines Quadrats, um auf die Zahl, welche es gebildet hat, zurückzukommen, und zerlegen wir das Quadrat einer aus Zehnern und Einern zusammengesetzten Zahl, z. B. das Resultat einer Multiplikation von 24 mit $24 = 576 = 20 . 20 + 2 . (20 . 4) + 4 . 4$. Zunächst finden wir darin das Quadrat der Einheiten (4 . 4), zu welchem die Einer des Resultats, und oftmals einige Zehner gehören. Da der höhere Theil dieser Zahl (die Zehner) aber in dem doppelten Produkte der Zehner durch die Einer (als $4 . 2 + 2 . 4$) einbegriffen ist, so ist ein unmittelbares Auffinden nicht möglich. Das Gleiche hat Statt mit dem Aufsuchen des doppelten Produktes der Zehner durch die Einer, deren Kenntniß überdies uns zu nichts führen würde. Das Quadrat der Zehner endlich (20 . 20), das den beträchtlichsten Theil des ganzen Quadrats bildet, zeigt uns seinen höchsten Theil zur Linken der Zahl, und wir können bei ihm anfangen. Zunächst nun enthält es weder Zehner noch Einer. In den Hundertern also müssen wir es zu finden suchen. Dort finden sich wahrscheinlich einige Hunderter, welche aus dem zweiten Produkte herrühren, aber gewiß nicht genug, um das Quadrat der Ziffer der Zehner bis zu dem der nächst höheren Ziffer steigen zu lassen. Als Ziffer der Zehner können wir also die Wurzel des größten in den Hundertern begriffenen Quadrats annehmen. Den nach Wegnahme des größten Quadrats noch übrig bleibenden Hundertern fügt man die Zehner des Resultats zu: die so erhaltene Zahl muß das doppelte Produkt der Zehner durch die Einer und noch vielleicht einige Zehner mehr in sich begreifen; wenn wir dieselbe nun durch das Doppelte der Zehner dividiren, welche die erste Operation uns gegeben hat, so wird der Quotient die Ziffer der Einer sein. Es handelt sich nun noch darum, zugleich die Genauigkeit der beiden Ziffern zu prüfen. Diese Verifikation ist sehr leicht: nehmen wir von dem, was nach der Subtraktion des Quadrats der Zehner übrig geblieben, das doppelte Produkt der Zehner durch die Einer und das Quadrat der Einer hinweg, und behalten nach dieser Operation keinen Rest, so hat die in Rede seiende Zahl eine ganze Wurzel, und diese Wurzel ist die von uns gefundene.

§ 12. Setzen wir aber einmal einen Rest voraus. Wir schließen dann, daß die in Rede seiende Zahl keine andere ganze Zahl als Wurzel hat, und wir untersuchen, wie viel Zehntheile diese Wurzel enthält. Denken wir uns hierbei die Wurzel in Zehntheile und in Einer zerlegt (wobei vorausgesetzt ist, daß die Zehner in der Klasse der Einer mit einbegriffen sind); ihr Quadrat muß, außer dem vollständigen Quadrate der Einer (wir sagen vollständig, weil es das Quadrat des ganzen Theils der gefundenen Wurzel ist) das doppelte Produkt der Einer durch die Zehntheile und noch das Quadrat der Zehntheile enthalten. Das vollständige Quadrat der Einheiten ist hinweggenommen worden; aber in dem Reste, dem zwei Nullen angehängt sind (da Zehntheile in der Wurzel Hunderttheile des Quadrats geben), haben wir das doppelte Produkt der vollständigen Zahl der Einer durch die Zehntheile und das Quadrat der Zehntheile zu suchen, das heißt, eine schon ausgeführte Operation zu erneuern. Hängen wir dem folgenden Reste zwei Nullen an (da wiederum Hunderttheile in der Wurzel Zehntausendtheile des Quadrats geben), so wird die Wiederholung desselben Verfahrens die Hunderttheile der Wurzel ergeben. In dieser Weise fortfahrend, wird man eine möglichst wenig von der wahren Wurzel unterschiedene Zahl finden.

Die Betrachtungen, welche wir so eben auf eine ganze Zahl angewendet haben, würden sich für jede andere, welches auch die Anzahl ihrer Ziffern sei, wiederholen lassen. Wir wenden sie gleichmäßig auf eine gebrochene Zahl an, deren Decimaltheil nur Zifferzeichen enthält; zur Aushülfe bleiben uns immer die ergänzenden Nullen, um die Zahl der Decimalziffern gerade zu machen, was eine unerläßliche Bedingung für das Ausziehen von Quadratwurzeln ist.

§ 13. Brüche. Wir haben von verschiedenen Theilen der Einheit gesprochen; aber alle die, mit denen wir bis jetzt uns beschäftigten, waren einem Gesetze gleichförmigen Abnehmens unterworfen, so daß die Rechnung mit ihnen ganz dieselbe wie die mit ganzen Zahlen ist. Es ist noch von den möglichen Zerlegungen der Einheit in

Theile, welche unter sich keine Verbindung mehr haben und sich nicht mehr nach unserer Stufenleiter des Zunehmens und des Abnehmens bemessen lassen, zu reden: Zerlegungen, die vor der conventionellen Annahme eines zehntheiligen Abnehmens die allein angewendeten waren. Konnte man im Quotienten bei einer Division keine ganzen Einheiten erhalten, — gelangte man z. B. zu einem Reste 3, während der Divisor 7 war, so schloß man also: den siebenten Theil von 3 nehmen, kommt auf dasselbe hinaus, als den siebenten Theil von jeder Einheit der 3 zu nehmen, oder drei mal den siebenten Theil einer Einheit; wir dürfen also unserm ganzen Quotienten drei Siebentheile der Einheit zufügen. In dieser Weise sah man, je nach den Umständen, Dritttheile, Viertheile, Fünftheile, Sechstheile u. s. w. entstehen. Zu ihrer Bezeichnung erdachte man keine neue conventionelle Form; da die durch die Zahl 7 zu dividirende Zahl 3 dahin geführt hatte, den Quotienten um drei Siebentheile der Einheit zu vermehren, drückte man diese drei Siebentheile durch das Zeichen der vorzunehmenden Division aus, $\frac{3}{7}$. Der Dividendus nahm in dem gewöhnlichen Gebrauche den Namen des Zählers an, weil er die Zahl von Theilen der Einheit bezeichnet, welche man dem Quotienten zufügen muß; der Divisor erhielt den Namen Nenner: er benennt in der That die Art von Einheitstheilen. Das vollständige Zeichen hieß ein Bruch.

Die in jedem Falle verschiedene Theilung der Einheit mußte ihr Unbequemes haben, sobald man Einheiten verschiedener Art zu einander fügen oder von einander hinwegnehmen wollte. Jedes Mal, wo eine dieser Operationen gemacht werden sollte, hatte man nöthig, eine Hülfs-Einheit anzunehmen, einen nach Umständen veränderlichen Ausdruck der Vergleichung. Da man, ohne den Quotienten in seinem Werthe zu ändern, mit ein und derselben Zahl die beiden Glieder einer Division multipliciren oder durch diese Zahl sie dividiren kann, so gab man jedem Bruche denselben Nenner.

Wir bemerken hier nur, daß der gemeinschaftliche Nenner gemeiniglich alle anderen Nenner als Faktoren enthalten muß, — daß aber

in einer großen Zahl von Fällen, die der Gebrauch kennen lehren muß, Vereinfachungen möglich sind. Auf diesen Zustand von Gleichartigkeit zurückgeführt, werden die Brüche, wenn es sich um ihre Addition oder Subtraktion handelt, nicht mehr Schwierigkeiten als die Decimalzahlen darbieten.

Handelt es sich darum, Brüche mit einander zu multipliciren oder sie durch einander zu dividiren, so ist die so eben besprochene Reduction nicht nöthig. Sind $\frac{3}{4}$ mit 5 zu multipliciren, so hat man nur 5 mal drei Einheiten einer gegebenen Art zu wiederholen; — man erhält also $\frac{15}{4}$. Würde man statt 5 etwa $\frac{5}{6}$ nehmen, so könnte man, da $\frac{5}{6}$ sechs mal kleiner ist als 5, des erhaltenen Resultats sich bedienen, indem man es sechs mal kleiner macht, dadurch, daß man den Divisor mit 6 multiplicirt; wir bekommen also, als Produkt der beiden Faktoren $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$, das Resultat $\frac{15}{24}$, ein Produkt, welches nur ein neuer Bruch ist, in dem das Produkt der Zähler durch das der Nenner dividirt wird.

Handelt es sich, im Gegentheile, darum, $\frac{3}{4}$ durch 5 zu dividiren, d. h. den fünften Theil des Quotienten $\frac{3}{4}$ zu nehmen, oder, was dasselbe ist, ihn 5 mal kleiner zu machen, so wird der Zweck erreicht, indem man den Nenner durch 5 multiplicirt, was hier $\frac{3}{20}$ ergibt. Will man durch $\frac{5}{6}$ statt durch 5 dividiren, so ist nur das vorige Resultat passend zu ändern. $\frac{5}{6}$ ist 6 mal kleiner als 5; der Divisor aber würde nicht 6 mal kleiner werden können, ohne daß der Quotient nicht 6 mal größer würde: — man macht also den Quotienten $\frac{3}{20}$ sechs mal größer, indem man seinen Dividendus mit 6 multiplicirt, und erhält als Resultat der Division von $\frac{3}{4}$ durch $\frac{5}{6}$ den Bruch $\frac{18}{20}$. Man bemerkt sogleich, daß dieser Quotient nichts

Anderes ist, als das Produkt von $\frac{3}{4}$ mal $\frac{6}{5}$, d. h. des Dividendusbruchs, mal dem umgekehrten Divisorbruche.

§ 14. Es ist hier der Ort, ein Wort von dem Mittel zu sagen, wodurch man die Brüche vereinfacht, deren Nenner eine gewisse Anzahl von Ziffern hat, d. h. eine Theilung der Einheit, welche ganz ungewöhnlich ist, während die einfachen Theilungen, wie Dritttheile, Viertheile, Fünftheile, von häufigem Gebrauche sind.

Da ein Quotient sich nicht ändert, wenn man seine beiden Glieder durch ein und dieselbe Größe dividirt, so kann man mit besonders gewählten Divisoren oft große Vereinfachungen bewirken. Das Maximum der Vereinfachung würde man erreichen, wenn man durch die möglichst größte Zahl dividirte. Dieser größte gemeinschaftliche Theiler für beide Glieder des Quotienten würde sich durch annäherndes Versuchen finden lassen, — man kann ihn aber ziemlich kurz auf folgende Art finden:

Haben wir $\frac{a}{b}$, und b größer als a, etwa gleich $2a + c$ (2 ist der Quotient der Division von b durch a und c der Rest); so können wir $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{2a + c}$ ersetzen. Der größte gemeinschaftliche Theiler, welcher a theilt, wird auch sein Vielfaches 2 a theilen; da er zugleich $2a + c$ und 2 a theilen soll, so muß er nothwendiger Weise auch c theilen. Wir können also, statt den größten gemeinschaftlichen Theiler des Bruchs $\frac{a}{b}$ zu suchen, den des Hülfsbruchs $\frac{c}{a}$, welcher derselbe ist, suchen. Man hüte sich, diesen Bruch $\frac{c}{a}$ dem ersten Bruche als gleich anzunehmen; er hat mit $\frac{a}{b}$ nur den größten gemeinschaftlichen Theiler gemein, und hat den Vortheil, einfacher zu sein. Wie wir sahen, theilte a nicht genau b; es war also nicht selbst die gesuchte Zahl; aber c würde dieser verlangte Divisor sein, wenn a ein Vielfaches von c wäre. Hat diese Bedingung nicht Statt, so kann man für $\frac{c}{a}$ setzen $\frac{c}{3c + c'}$ (wobei wir 3 als Quotienten der Division

von a durch c, und c′ als den Rest ansehen). Aehnlich folgernd, wie zuvor, sehen wir, daß wir anstatt des ersten Hülfsbruchs $\frac{c}{a}$ einen neuen Hülfsbruch $\frac{c'}{a}$ anwenden können, der weder dem vorhergehenden $\frac{c}{a}$, noch dem gegebenen $\frac{a}{b}$ gleich ist, aber denselben größten gemeinschaftlichen Theiler hat. Durch diese allmäligen Substitutionen wird man nothwendiger Weise zu einem Hülfsbruche gelangen, in welchem der Nenner ein genaues Vielfache des Zählers wird, sei es auch nur, daß der Zähler Eins werde, in welchem Falle es keinen gemeinschaftlichen Theiler gibt. Sobald die vorhergehende Bedingung erfüllt ist, wird der Zähler des Hülfsbruchs, den man in diesem Augenblicke anwendet, der gesuchte Divisor sein; es bleibt nur noch übrig, durch diese Zahl den Zähler und den Nenner des gegebenen Bruchs zu dividiren.

Das Materielle dieser Operation besteht darin, den Nenner des gegebenen Bruchs durch seinen Zähler zu dividiren; diesen Zähler durch den gebliebenen Rest; diesen ersten Rest durch den zweiten Rest (wenn die zweite Division keinen ganzen Quotienten ergeben hat) rc. Derjenige Rest, welcher zuerst genau den vorhergehenden theilen wird, ist alsdann der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler.

§ 15. Es bleibt noch endlich übrig, die Mittel darzulegen, durch welche man von diesen willkürlichen Theilungen der Einheit zur regelmäßigen oder zehntheiligen Division übergeht, und umgekehrt, die Decimalbrüche in unregelmäßige oder gewöhnliche Brüche umzuwandeln: Umformungen, welche die zu lösenden Aufgaben oft erfordern. Das in ersterem Falle zu befolgende Verfahren ist dasselbe, welches dazu gedient hat, die Decimalen der nicht ganzen Quotienten zu finden. Es gibt übrigens ein Kennzeichen, das im Voraus angibt, ob die Umformung nicht eine begränzte Zahl von Decimalziffern hervorbringt. Dies hat allemal Statt, wenn der Nenner nur die Faktoren 2 und 5 hat; es genügt alsdann, um eine Decimal-Division zu erhalten, durch Multiplikationen bis zu dem Punkte zu gelangen,

wo diese beiden Faktoren dieselbe Anzahl Male in dem Nenner genommen sind.

In Betreff der Decimalbrüche, sobald sie nur eine beschränkte Zahl von Ziffern haben, wird es immer leicht sein, sie unter der Form gewöhnlicher Brüche darzustellen, d. h. ihnen einen Nenner zu geben. Betrachtet man aber die sogenannten periodischen, einfachen oder gemischten, Brüche, in denen die Decimal-Partie sich aus einer unbestimmten Anzahl kurzer Perioden zusammensetzt, so wird, wenn man eine dieser Perioden wegnimmt, die Zahl derer, welche rechts vom Komma stehen bleiben, nicht weniger unbestimmt sein. Diese aus dem Wesen des Unendlichen hervorgehende Betrachtung, welche schwer zu fassen scheinen könnte, obgleich ihre strenge Richtigkeit nicht bestritten werden kann, führt uns zu dem verlangten Ziele. Es sei 42,3636... ein einfacher periodischer Bruch. Zieht man ihn von der 100fach größeren Zahl 4236,3636... ab, so werden die Decimalstellen, als einander gleich, verschwinden, so daß wir $4236 - 42 = 99$ mal der gesuchten Zahl x haben werden; nehmen wir den neunundneunzigsten Theil jedes Gliedes, so haben wir

$$x = \frac{4236 - 42}{99}.$$

Gäbe es keine ganzen Stellen, so hätten wir $x = \frac{36}{99}$, d. h. ein einfacher periodischer Decimalbruch ist gleich der Periode, dividirt durch eine Zahl, welche aus so viel Neunen besteht, als die Periode Ziffern hat.

Die gemischten periodischen Decimalbrüche, wie 42,67363636.... werden durch ein ganz ähnliches Verfahren ausgewerthet, — und man würde für das gegenwärtige Beispiel als Werth finden:

$$x = \frac{426736 - 4267}{9900}.$$

§ 16. Wir dürfen die Brüche nicht verlassen, ohne einer Form zu erwähnen, unter der sie sich zuweilen zeigen. Es kann vorkommen, daß, während der Zähler eine ganze Zahl ist, der Nenner theils ganze Zahl, theils Bruch ist: z. B. $\frac{4}{5 + \frac{2}{3}}$; daß ferner der Nenner des

Bruchs selbst wieder eine gemischte Zahl ist $\frac{4}{5+\frac{2}{3+\frac{7}{9}}}$; daß ebenso der neue Bruchtheil einen halb-bruchtheiligen Nenner habe, und so fort. Wir werden schnell von dieser ungewöhnlichen Form zu der gewöhnlichen Form übergehen; nämlich (auf das zweite Beispiel uns beziehend), formen wir aus $3+\frac{7}{9}$ einen einzigen Bruch $\frac{3.9+7}{9}$, durch welchen wir die ganze Zahl 2 dividiren können. Der Quotient $\frac{2.9}{3.9+7}$, der 5 hinzugefügt, gibt uns als Divisor von 4 einen einfachen Bruch $\frac{5(3.9+7)+2.9}{3.9+7}$; so daß wir als schließliches Resultat den gewöhnlichen Bruch $\frac{4.(3.9+7)}{5.(3.9+7)+2.9}$ finden, welcher dem umzuformenden zusammenhängenden oder Kettenbruche (wie man solche Art von Brüchen nennt) gleich ist.

Bis hierher sind die Größen für sich allein betrachtet worden. Wir wollen uns nun in dem Folgenden mit ihren Beziehungen zu und unter einander beschäftigen.

Beziehungen der Zahlen, Proportionen.

§ 17. Proportionen. Man begegnet oft Größen, welche unter sich dergestalt verbunden sind, daß ihre Aenderung eine simultane ist. Wir werden hier nur von zwei Arten von Verbindung reden: die erste, der gemäß zwei Größen beständig den gleichen Unterschied zeigen (wobei wir als Beispiel die von zwei Courieren, welche mit gleicher Geschwindigkeit reisen, deren Einer aber dem Andern in der Abreise zuvorgekommen ist, durchmessenen Räume annehmen wollen); die zweite, der gemäß die Eine der Größen nicht verdoppelt, verdreifacht u. s. w. werden könnte, ohne daß auch die andere Größe sofort verdoppelt, verdreifacht u. s. w. würde; — der gemäß die

wo diese beiden Faktoren dieselbe Anzahl Male in dem Nenner genommen sind.

In Betreff der Decimalbrüche, sobald sie nur eine beschränkte Zahl von Ziffern haben, wird es immer leicht sein, sie unter der Form gewöhnlicher Brüche darzustellen, d. h. ihnen einen Nenner zu geben. Betrachtet man aber die sogenannten periodischen, einfachen oder gemischten, Brüche, in denen die Decimal-Partie sich aus einer unbestimmten Anzahl kurzer Perioden zusammensetzt, so wird, wenn man eine dieser Perioden wegnimmt, die Zahl derer, welche rechts vom Komma stehen bleiben, nicht weniger unbestimmt sein. Diese aus dem Wesen des Unendlichen hervorgehende Betrachtung, welche schwer zu fassen scheinen könnte, obgleich ihre strenge Richtigkeit nicht bestritten werden kann, führt uns zu dem verlangten Ziele. Es sei 42,3636... ein einfacher periodischer Bruch. Zieht man ihn von der 100fach größeren Zahl 4236,3636... ab, so werden die Decimalstellen, als einander gleich, verschwinden, so daß wir $4236 - 42 = 99$ mal der gesuchten Zahl x haben werden; nehmen wir den neunundneunzigsten Theil jedes Gliedes, so haben wir

$$x = \frac{4236 - 42}{99}.$$

Gäbe es keine ganzen Stellen, so hätten wir $x = \frac{36}{99}$, d. h. ein einfacher periodischer Decimalbruch ist gleich der Periode, dividirt durch eine Zahl, welche aus so viel Neunen besteht, als die Periode Ziffern hat.

Die gemischten periodischen Decimalbrüche, wie 42,67363636.... werden durch ein ganz ähnliches Verfahren ausgewerthet, — und man würde für das gegenwärtige Beispiel als Werth finden:

$$x = \frac{426736 - 4267}{9900}.$$

§ 16. Wir dürfen die Brüche nicht verlassen, ohne einer Form zu erwähnen, unter der sie sich zuweilen zeigen. Es kann vorkommen, daß, während der Zähler eine ganze Zahl ist, der Nenner theils ganze Zahl, theils Bruch ist: z. B. $\frac{4}{5 + \frac{2}{3}}$; daß ferner der Nenner des

Bruchs selbst wieder eine gemischte Zahl ist $\frac{4}{5+\frac{2}{3+\frac{7}{9}}}$; daß ebenso der neue Bruchtheil einen halb-bruchtheiligen Nenner habe, und so fort. Wir werden schnell von dieser ungewöhnlichen Form zu der gewöhnlichen Form übergehen; nämlich (auf das zweite Beispiel uns beziehend), formen wir aus $3+\frac{7}{9}$ einen einzigen Bruch $\frac{3.9+7}{9}$, durch welchen wir die ganze Zahl 2 dividiren können. Der Quotient $\frac{2.9}{3.9+7}$, der 5 hinzugefügt, gibt uns als Divisor von 4 einen einfachen Bruch $\frac{5(3.9+7)+2.9}{3.9+7}$; so daß wir als schließliches Resultat den gewöhnlichen Bruch $\frac{4.(3.9+7)}{5.(3.9+7)+2.9}$ finden, welcher dem umzuformenden zusammenhängenden oder Kettenbruche (wie man solche Art von Brüchen nennt) gleich ist.

Bis hierher sind die Größen für sich allein betrachtet worden. Wir wollen uns nun in dem Folgenden mit ihren Beziehungen zu und unter einander beschäftigen.

Beziehungen der Zahlen, Proportionen.

§ 17. Proportionen. Man begegnet oft Größen, welche unter sich dergestalt verbunden sind, daß ihre Aenderung eine simultane ist. Wir werden hier nur von zwei Arten von Verbindung reden: die erste, der gemäß zwei Größen beständig den gleichen Unterschied zeigen (wobei wir als Beispiel die von zwei Courieren, welche mit gleicher Geschwindigkeit reisen, deren Einer aber dem Andern in der Abreise zuvorgekommen ist, durchmessenen Räume annehmen wollen); die zweite, der gemäß die Eine der Größen nicht verdoppelt, verdreifacht u. s. w. werden könnte, ohne daß auch die andere Größe sofort verdoppelt, verdreifacht u. s. w. würde; — der gemäß die

eine nicht $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ 2c. von dem, was sie war, werden könnte, ohne daß die andere in demselben Augenblicke die gleiche Veränderung erführe. Nehmen wir z. B. Arbeiter und die Arbeit, welche sie machen: die Menge der Arbeit ist dergestalt mit der Zahl der Arbeiter verknüpft, daß diese Zahl nicht die doppelte werden kann, ohne daß die Menge der Arbeit es ebenfalls werde.

§ 18. Sobald zwei Größen sich in einem der hier oben besprochenen Fälle befinden, so gibt es eine Möglichkeit, die eine zu entdecken, wenn nur die andere bekannt ist: nämlich, wenn ein früherer Fall ein Paar gleichzeitiger Werthe dieser beiden Größen hat kennen lehren. Ein auf jeden Fall bezügliches Beispiel wird dies näher erklären.

Beispiel für den ersten Fall.

§ 19. Ein Courier hatte um 10 Uhr 12 Meilen, ein anderer Courier hatte deren 9 gemacht. Um Mittag hatte der erste Courier 17 gemacht; wie viel Meilen hatte der zweite zurückgelegt?

Die Auflösung der Aufgabe ist folgende:

Da die Geschwindigkeit dieselbe ist, müssen sie beständig in derselben Entfernung von einander bleiben; man muß stets den gleichen Unterschied zwischen den durchlaufenen Wegen finden. Wir haben nun einen ersten Ausdruck dieses Unterschiedes $(12-9)$; bezeichnen wir den unbekannten Raum durch x, so werden wir als zweiten Ausdruck $(17-x)$ uns bilden. Diese zwei verschiedenen Ausdrücke ein und derselben Größe geben uns die Gleichheit oder G l e i c h u n g

$$12-9=17-x.$$

Jetzt bleibt, wenn dies thunlich ist, nur noch diese Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche x allein auf der ersten Seite hat (wir nennen die durch das Zeichen $=$ getrennten Ausdrücke die S e i t e n der Gleichung, und bezeichnen die Theile, welche in jedem Ausdrucke die Zeichen $(+)$ und $(-)$ trennen, als die G l i e d e r), und als an-

dere Seite irgend welche Verbindung der bekannten Größen hat. Wir können, ohne den Werth der Gleichung zu verändern,

1°. zwei gleiche Größen um ein und dieselbe Größe vermehren oder vermindern;

2°. sie mit ein und derselben Größe multipliciren oder durch dieselbe sie dividiren.

Versuchen wir, ob diese Operationen die gewünschte Umformung herbeiführen. Addiren wir x, so ergibt sich

$$12 - 9 + x = 17.$$

Addiren wir hierzu 9, so haben wir

$$12 + x = 17 + 9.$$

Subtrahiren wir, um die 12 auf der linken Seite verschwinden zu machen, diese Zahl von beiden Seiten der Gleichung, so haben wir als Lösung der Aufgabe

$$x = 17 + 9 - 12, \text{ d. h.}$$

$$\underline{x = 14.}$$

Beispiel für den zweiten Fall.

§ 20. Man will wissen, wie viel Mètres Arbeit 9 Arbeiter machen, wenn 6 Arbeiter bereits 24 Mètres gearbeitet haben. Wenn nun in einem Bruche der Dividendus und der Divisor zu gleicher Zeit doppelt oder dreifach 2c. werden, so ändert sich der Quotient nicht. Betrachten wir nun von den beiden Größen die eine als Dividendus, die andere als Divisor, so wird der Quotient, den wir erhalten werden, derselbe sein, in dem Falle, daß wir beide Größen zu gleicher Zeit kennen, und in dem Falle, daß wir nur eine von ihnen kennen; d. h. wir werden zwar verschiedene Ausdrücke für ein und denselben Quotienten haben, $\frac{6}{24}$ und $\frac{9}{x}$; woraus wir die Gleichung

$$\frac{6}{24} = \frac{9}{x}$$

bilden. Multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit x, so ergibt dies

$$\frac{6x}{24} = 9;$$

x ist hier nur noch ein Nenner. Um es zu isoliren oder es von seinem Multiplikator und seinem Divisor zu befreien, multiplicirt man die Gleichung mit 24, was

$$6x = 9.24$$

ergibt, und dividirt diese letztere Gleichung durch 6. Man erhält alsdann

$$x = \frac{9.24}{6}\text{, oder}$$

$$x = 36.$$

§ 21. Wir setzen in diesem zweiten Falle voraus, daß die beiden Größen zu gleicher Zeit wachsen oder abnehmen; es kann auch vorkommen, daß, während die eine der Größen doppelt oder dreifach u. s. w. wird, die andere, anstatt ebenfalls doppelt oder dreifach u. s. w. zu werden, die Hälfte, oder das Dritttheil u. s. w. dessen werde, was sie anfänglich war. Z. B. die Anzahl der Stunden, welche auf die Beendigung einer bestimmten Arbeit verwendet wurden, wird halbirt, sobald die Zahl der Arbeiter verdoppelt wird. Das alsdann anzuwendende Verfahren ist etwas abweichend von dem in dem vorigen § besprochenen, aber dennoch leicht zu finden.

Nehmen wir an, daß in dem ersten Falle (jede Frage bietet zwei Fälle; z. B. erster Fall, 2 Arbeiter haben 12 Mètres Arbeit gemacht; zweiter Fall, 6 Arbeiter haben x Mètres gemacht) die erste Größe das Doppelte dessen sei, was sie in dem zweiten Falle ist. In diesem nämlichen ersten Falle wird die zweite Größe die Hälfte dessen sein, was sie in dem zweiten Falle ist. Wir werden, um unsere ersten Quotienten zu bilden, die Größen derselben Art nehmen, und der Dividendus wird demzufolge das Doppelte des Divisors sein. Wenn wir eine zweite Division bildeten, indem wir die zweite Größe des ersten Falles als Dividendus nähmen, so würden wir die Umkehrung der ersten Division haben, d. h. der neue Dividendus, statt das Doppelte seines Divisors zu sein, wäre dessen Hälfte. Wenn wir aber die zweite Größe des zweiten Falles als Dividendus nehmen, so wird die zweite Division denselben Quotienten ergeben, wie die erste, weil,

wie bei der ersten, der Dividendus das Doppelte des Divisors sein wird. Wir können also eine Gleichung schreiben, in welcher x sich befindet, und es bleibt alsdann nur noch übrig, den Unbekannten x durch die oben dargelegten Verfahrungsarten zu entwickeln.

Erster Fall.

1ste Größe,		2te Größe,
6 Arbeiter	haben gebraucht	15 Stunden.

Zweiter Fall.

Wie viel werden gebrauchen:

1ste Größe,		2te Größe,
9 Arbeiter ?	Sie werden gebrauchen	x Stunden.

Gleichung: $\frac{6}{9} = \frac{x}{15}$, also

$$x = \frac{15.6}{9} = 10.$$

§ 22. Der Ausdruck $\frac{6}{42} = \frac{9}{x}$ würde haben geschrieben werden können

$$6:42 = 9:x$$

$$(6:42::9:x).$$

Unter dieser letzteren Form nennt man ihn eine Proportion; 6 und x sind die äußeren Glieder, 24 und 9 die mittleren, 6 und 9 die Vorderglieder, 24 und x die Hinterglieder der Proportion. Wir werden ohne Unterschied beide Ausdrucksweisen anwenden, und darum sagen: „6 dividirt durch 24 ist gleich 9 dividirt durch x", oder auch: „6 verhält sich zu 24, wie sich 9 verhält zu x."

Die Proportion

$$6:24 = 9:x$$

heißt eine direkte Proportion, während $\frac{6}{9} = \frac{x}{15}$, oder $6:9 = x:15$ eine umgekehrte oder indirekte Proportion heißt.

Die Proportionen (oder Gleichungen von Verhältnissen) können zur Lösung einer großen Menge von Aufgaben dienen; es handelt

sich, wie man sieht, nur darum, in einer Frage zwei verschiedene Ausdrücke ein und derselben Differenz oder ein und desselben Quotienten zu entdecken, deren einer die zu bestimmende noch unbekannte Größe enthält. Wir werden einige Anwendungen machen, sobald wir die Progressionen und Logarithmen abgehandelt haben werden.

§ 23. Wir haben bisher angenommen, daß wir nur ein Paar Werthe von Größen mit gleichmäßigen Aenderungen bei einer Frage kennten; oder, wir haben nur einen einzigen Ausdruck des Quotienten als ganz bekannt vorausgesetzt; es kann auch vorkommen, daß man eine gewisse Zahl von vorhergegangenen Beobachtungen hat, d. h. daß man mehrere völlig bekannte Ausdrücke ein und desselben Quotienten hat, in welcher der Unbekannte sich befindet. Man kann z. B. haben:

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c},\ \frac{x}{a}=\frac{d}{e},\ \frac{x}{a}=\frac{f}{g},\ \frac{x}{a}=\frac{h}{i},\cdots$$

Es ist aus allen diesen Gleichungen zugleich der Werth von x herzuleiten; es muß also der Art verfahren werden, daß alle Gleichungen zur Herbeiführung des Resultats mitwirken. Dies werden sie thun, wenn wir sie zu einer einzigen Gleichung combiniren, wie folgt. Wenn wir zwei gleichen Größen zwei andere gleiche Größen hinzufügen, so besteht die Gleichheit weiter; ebenso ist es, wenn wir zwei gleiche Größen davon hinwegnehmen; — endlich, wenn wir mit zwei gleichen Größen multipliciren oder durch dieselben dividiren, so besteht immer dennoch eine Gleichheit. Wir können also nur eine einzige Seite der Gleichung aus allen ersten Seiten machen, ebenso nur eine einzige Seite aus allen andern Seiten der Gleichungen; diese beiden Seiten in ihrer Zusammensetzung werden uns eine Gleichung geben, welche zu gleicher Zeit alle anderen Gleichungen darstellt. Versuchen wir die Zusammensetzung durch Addition, nachdem voher aber alle Nenner durch die bereits bekannte Umformung entfernt worden sind, so haben wir zunächst:

$$cx = ab,\ ex = ad,\ gx = af,\ ix = ah,\cdots$$

Durch Addition erhalten wir

$$x(c+e+g+i+\cdots)=a(b+d+f+h+\cdots)$$

woraus wir herleiten

$$x=\frac{a(b+d+f+h+\cdots)}{(c+e+g+i+\cdots)}.$$

§ 24. Aus dieser Formel können wir eine andere herleiten, deren Gebrauch sehr häufig ist:

$$\frac{x}{a}=\frac{b+d+f+h+\cdots}{c+e+g+i+\cdots}.$$

Sie drückt aus, daß, wenn man eine Reihe von gleichen Verhältnissen hat, irgend welches derselben einem neuen Verhältnisse gleich ist, dessen Zähler die Summe aller Zähler, und der Nenner die Summe aller Nenner ist.

§ 25. Durch Zusammensetzung der Gleichungen lassen sich noch einige Formeln von häufiger Anwendung finden.

Haben wir

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a}{b}=\frac{e}{f},\ \text{oder}$$

$$a:b=c:d \text{ u. } a:b=e:f,$$

bringen diese Gleichungen unter folgende Formel:

$$da=bc,\ fa=be,$$

und combiniren sie 1°. durch Addition, so ergibt sich:

$$a(d+f)=b(c+e),$$

woraus $\frac{a}{b}=\frac{c+e}{d+f}$, oder $\frac{c}{d}=\frac{c+e}{d+f}$, oder $\frac{e}{f}=\frac{c+e}{d+f}$.

Combinirt man 2°. durch Subtraktion, so erhält man:

$$a(d-f)=b(c-e),$$

woraus $\frac{a}{b}=\frac{c-e}{d-f}$, oder $\frac{c}{d}=\frac{c-e}{d-f}$, oder $\frac{e}{f}=\frac{c-e}{d-f}$.

Diese beiden Resultate, durch Subtraktion verbunden, führen uns zu

$$\frac{c+e}{d+f}=\frac{c-e}{d-f},\ \text{woraus}\ \frac{c+e}{c-e}=\frac{d+f}{d-f},$$

welche Gleichung man immer der folgenden

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \text{ oder } c:d = e:f$$

substituiren kann.

§ 26. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wenn x in die beiden Ausdrücke derselben Größe tritt. Wir wollen zunächst bemerken, daß in unseren Quotienten, es nicht auf Ein Mal, weder die beiden Zähler, noch die beiden Nenner bilden könnte, weil sonst die beiden Ausdrücke absolut dieselben sein würden, und man weiß, daß sie, um ein Resultat zu geben, verschieden sein müssen; es ist daher nothwendig, daß, wenn eine Seite x als Zähler enthält, es auf der andern Seite als Nenner vorkommen muß. Sei die Gleichung

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

so bilden wir daraus $x^2 = ab$ (unter x^2 das Produkt $x . x$ oder die zweite Potenz von x verstanden). Um x zu kennen, dürfen wir nur das Produkt ab in 2 gleiche Faktoren, deren jeder diesen Unbekannten x darstellen wird, zerlegen. Es handelt sich, wie man sieht, also nur um Ausziehung einer Wurzel, also eine uns bekannte Zerlegung.

x heißt die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen den Größen a und b.

§ 27. Gehen wir zu den Aequidifferenzen, oder Gleichungen, nicht von Verhältnissen, sondern von Differenzen über. So wie in den Gleichungen von Verhältnissen, in den Proportionen, x nicht zu gleicher Zeit die beiden Zähler bilden konnte, so darf es nicht zu gleicher Zeit, auf jeder Seite einer Aequidifferenz den Subtrahendus oder den Minuendus bilden.

Aus

$$a - x = x - b, \text{ folgt durch Umformung}$$

$$2x = a + b, \text{ also}$$

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Hierbei heißt x die **mittlere Proportionale** oder das **arithmetische Mittel** zwischen den Zahlen a und b.

Von den Progressionen und den Logarithmen.

§ 28. Progressionen und Logarithmen. Wir nennen Progression eine Reihe von Gliedern, die durch das gleiche Gesetz des Wachsens oder Abnehmens mit einander verbunden sind.

Sobald dieses Gesetz jedes Glied sich auf dem Wege der Addition oder Subtraktion aus dem vorhergehenden Gliede und einer constanten Zahl, die man den **Namen**, die **Differenz** oder den **Unterschied** der Progression nennt, bilden heißt, so ist die Progression eine **arithmetische**. Die Zunahme hängt keineswegs von dem vorhergehenden Gliede ab.

Wenn jedes Glied der Progression sich aus dem vorhergehenden Gliede und einer constanten Zahl, dem **Quotienten** oder dem **Exponenten** der Progression, auf dem Wege der Multiplikation oder der Division bilden muß, so nimmt die Reihe den Namen einer **geometrischen Progression** an. Die Zunahme hängt alsdann von dem vorhergehenden Gliede ab, weil sie diesem Gliede, eine gewisse Anzahl Male wiederholt, gleich ist.

§ 29. Arithmetische Progression.

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

ist eine arithmetische Progression, welche alle ganzen Zahlen einschließt, so daß die Summe zweier dieser Glieder nothwendig ein anderes geben wird. Dies hat allemal Statt, wenn das erste Glied 0 (Null) ist, vorausgesetzt, daß alle andere die successiven Vielfachen der Differenz sind.

In dieser Progression wird uns die Summe des vierten und fünften Gliedes z. B. nicht das neunte, sondern das achte geben, — die des vierten und sechsten wird uns das neunte und nicht das zehnte geben, u. s. w. Die Differenz des fünften und siebenten

Gliedes führt nicht zum zweiten, sondern zum dritten; die Differenz des vierten und neunten führt uns zum sechsten und nicht zum fünften u. s. w. Wir erkennen darin ein Gesetz.

§ 30. Geometrische Progression.

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : .....

ist eine geometrische Progression, die sich aus allen auf einander folgenden Potenzen von 10 dergestalt gebildet hat, daß das Produkt zweier ihrer Glieder immer ein anderes gibt. Dies ist immer der Fall, sobald das erste Glied 1 ist, weil dann alle andere Glieder die successiven Potenzen des Quotienten sind.

Untersucht man, wie es bei der arithmetischen Progression geschehen, zu welchem Gliede man durch Combinirung zweier andern Glieder durch Multiplikation oder Division gelangt, so sieht man, daß das vierte Glied mal dem fünften uns zum achten und nicht zum neunten führt; das vierte mal dem sechsten gibt, nicht das zehnte, sondern das neunte, ꝛc. Die Division des siebenten Gliedes durch das fünfte führt nicht zum zweiten, sondern zum dritten; die Division des neunten durch das vierte gibt das sechste, und nicht das fünfte Glied, u. s. w. Wir finden also in beiden Progressionen dasselbe Gesetz, wenn wir von der Verschiedenheit der Zusammensetzung abstrahiren; in jener, wie in dieser Progression, führt die Verbindung (eines Theils durch Addition, andern Theils durch Multiplikation) der vierten und sechsten Glieder gleichmäßig zum neunten; in beiden Progressionen führt die Verbindung (eines Theils durch Subtraktion, andern Theils durch Division) der vierten und neunten Glieder in ganz gleicher Weise zum sechsten Gliede, u. s. w. Es findet also hierin eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung Statt. — Aber es sind unter diesen Verbindungen diejenigen, welche der arithmetischen Progression angehören, bei Weitem einfacher, als die auf die geometrische Progression bezüglichen; — sollte man nun dieser Uebereinstimmung nicht sich bedienen können, um durch Anwendung der Verbindungen der ersten Art einfach und leicht zu den Resultaten der Verbindungen der zweiten Art zu gelangen? Allerdings ist dies

möglich: es genügt hierzu, eine Tabelle zu entwerfen, welche in zwei parallelen Colonnen uns auf derselben Linie die Glieder derselben Ordnung für jede der Proportionen gibt; alsdann suchen wir, um ein Glied der geometrischen Progression zu kennen, das Glied, welches ihm in der arithmetischen Progression entspricht. Jedes Glied dieser zweiten Progression wird dann, vermöge seiner Stellung, eine von ihm ganz verschiedene Zahl bezeichnen, mit welcher es nur eine conventionelle Beziehung hat. Wir nennen sie Logarithmus.

§ 31. Logarithmen. Wenn wir irgend einen andern Exponenten als 10, irgend eine andere Differenz als 1, bei den geometrischen und arithmetischen Progressionen angewendet haben würden, dabei aber 1 und 0 als erste Glieder unserer Progressionen beibehalten worden wären, so würden wir immer dieselbe Uebereinstimmung gefunden haben, da sie nur von den ersten Gliedern abhängt. Wir können also als Exponenten (Quotienten) jede Größe wählen, welche in der Reihefolge ihrer Potenzen die Reihe der ganzen Zahlen enthält, oder wenigstens Zahlen enthält, welche sich ihnen aufs Aeußerste annähern; — alsdann wird unsere Logarithmentabelle uns die Leichtigkeit geben, auf sehr kurze Weise das Produkt irgend welcher zwei Zahlen zu erhalten.

Bei der Anwendung dieses neuen Exponenten würde man die arithmetische Progression haben beibehalten können so wie sie war; da man aber die Eins als den Logarithmus von 10 beibehalten wollte (die deshalb auch die Basis heißt), mußte man eine von der Eins verschiedene Differenz suchen, welche fähig sei, ebenso viel Glieder zwischen 0 und 1 zu geben, als der neue Exponent deren zwischen 1 und 10 gegeben hatte. In dieser Art hat man eine weit ausgedehntere Logarithmentabelle geschaffen, als die erste es war, die aber dennoch dieselben Eigenschaften besitzt.

Wir wollen uns hier nicht bei der Art und Weise aufhalten, in der man von 10 zu einem andern Exponenten, und von 1 zu einer andern Differenz übergegangen ist; wir beschränken uns darauf, zu bemerken, daß in einer geometrischen Progression, wo jedes Glied

das geometrische Mittel zwischen den ihm benachbarten ist, es hinreicht, zunächst ein solches Mittel zwischen 10 und 1 einzufügen, was eine einfache Wurzelausziehung erfordert; dann hat man ein neues Mittel zwischen dem ersten und 1 eingeschoben, durch eine neue Wurzelausziehung u. s. w. Es ist ferner jedes Glied einer arithmetischen Progression das arithmetische Mittel zwischen seinen beiden Nachbargliedern, so daß man zunächst ein Mittel zwischen 0 und 1, mittelst einer einfachen Division durch 2, einschieben mußte; man hat dann ein neues arithmetisches Mittel zwischen dem ersten und 0, durch eine neue Division durch 2, eingeschoben u. s. w. Hat man auf jeder Seite dieselbe Zahl von Operationen gemacht, so kann man gewiß sein, daß der neue Exponent und die neue Differenz dieselbe Anzahl von progressiven Gliedern ergeben werden, der eine zwischen 1 und 10, die andere zwischen 0 und 1.

Gebrauch der Logarithmentabelle.

§ 32. Logarithmentabelle; ihr Gebrauch. Die gewöhnlichen Tabellen umfassen die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000, und es hat das Aufsuchen dieser Logarithmen keine Schwierigkeit. Um aber diejenigen der gemischten Zahlen (ganze Zahlen und Brüche), die innerhalb dieser Gränzen liegen, die der ganzen Zahlen und Brüche, welche über 10,000 hinausgehen, die der Zahlen endlich, welche kleiner als 1 sind, in denselben Tabellen zu finden, dient das folgende Verfahren:

§ 33. Wir beginnen mit dem Verfahren, dessen man sich bedient, um aus den Tafeln die Logarithmen der theils ganzen, theils gebrochenen Zahlen, die zwischen 1 und 10,000 liegen, herzuleiten. Es sei 2159,8 gegeben: der Logarithmus dieser Zahl ist größer als der von 2159, den die Tabelle angibt (die Logarithmen wachsen mit den Zahlen); wenn wir die Größe, um welche er jenen überschreitet, kennten, so würde eine einfache Addition uns zum Ziele führen.

Wir kennen die Zunahme, welche der Logarithmus von 2159 erfährt, wenn diese Zahl um 1 wächst (dieser Zuwachs findet sich in der dritten Colonne der Logarithmentafeln, in der Verlängerung des weißen Zwischenraumes, der die Logarithmen von 2159 und 2160 trennt); wenn beide Zuwachse (der der Zahl und der ihres Logarithmus) demselben Gesetze folgten, wenn sie zu gleicher Zeit sich verdoppelten, oder verdreifachten u. s. w., so würde es uns leicht sein, mittelst eines Paares simultaner Werthe, die die Tabelle angibt, den logarithmischen Zuwachs zu finden, welcher einem Zuwachs von 2159 entspricht, der von der Eins abweicht. Da dies aber nicht der Fall ist, so muß man anders verfahren. Der Fall der proportionellen Veränderung ist der einzige, in welchem wir die gegebene Aufgabe lösen können. Beachten wir indessen, daß die Zuwachse, mit denen wir hier zu thun haben, sehr klein sind, so würden wir, wenn wir so verführen, als ob sie diesem Gesetze unterworfen wären, nur einen unbedeutenden, außer Acht zu lassenden Fehler begehen. — 0,00020 ist, nach den Tafeln, der Zuwachs des Logarithmus von 2159 (3,33425), wenn diese Zahl um 1 wächst. Das Verhältniß beider Zuwachse (der eine logarithmisch, der andere numerisch) wird sein $\frac{1}{0,00020}$. Drücken wir den Zuwachs desselben Logarithmus, der der Addition von 0,8 statt von 1 entspricht, durch x aus, so wird nach unserer Voraussetzung das Verhältniß dieser neuen gleichzeitigen Zuwachse $\frac{0,8}{x}$ dasselbe wie das vorhergehende sein, und wir haben also die Gleichung

$$\frac{1}{0,00020} = \frac{0,8}{x}, \text{ oder}$$

$$1 : 0,00020 = 0,8 : x, \text{ also}$$

$$x = 0,00020 . 0,8$$

$$x = 0,00016,$$

welche Zahl, zum Logarithmus von 2159 addirt, uns den Logarithmus von 2159,8 gibt.

§ 34. Suchen wir jetzt die Logarithmen der ganzen und anderen Zahlen, welche über 10000 hinaus liegen. Es sei 215982 gegeben: nehmen wir die Zahl 2159,82 zur Hülfe, die hundert mal kleiner ist, so wissen wir deren Logarithmus zu finden. Diesem gefundenen Logarithmus fügen wir den Logarithmus von 100 zu, d. h. wir vermehren seine ganzen Stellen, die sogenannte Charakteristik, um 2 Einheiten.

Man bemerkt in den Tafeln, daß alle Potenzen von 10 als Logarithmen nur ganze Zahlen bieten, die aus so viel Einheiten bestehen, als es in den Potenzen Nullen gibt; d. h. daß die Reihe der Potenzen von 10 als Logarithmen die Reihe der natürlichen oder ganzen Zahlen hat; — daß also, von einer Potenz von 10 bis zur nächstfolgenden, alle Zwischenzahlen zu Logarithmen eine Reihe von Bruch-Zahlen haben, die zwischen den beiden auf einander folgenden ganzen Zahlen liegen, die diesen beiden Potenzen als Logarithmen dienen. Diesergestalt hat jede Zahl als Charakteristik ihres Logarithmus den Logarithmus derjenigen Potenz von 10, welche zunächst unter ihr liegt, — oder mit andern Worten, die Charakteristik des Logarithmus einer beliebigen Zahl schließt soviel Einheiten, weniger Einer, in sich, als die Zahl Ziffern hat. Es ist darum leicht, die fehlende Charakteristik eines Logarithmus zu ersetzen. Die Eigenschaft der Potenzen von 10, zu Logarithmen nur so leicht aufzufindende Zahlen zu haben, ist beim Aufsuchen der Logarithmen äußerst nützlich: Sie erlaubt nämlich, Hülfszahlen anzuwenden, welche 10 mal, 100 mal, 1000 mal u. s. w. kleiner oder größer als die gegebenen Zahlen sind, und schnell aus ihren Logarithmen diejenigen herzuleiten, welche man zu finden sucht.

§ 35. Suchen wir endlich die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche kleiner als 1 sind, zunächst die der Decimalbrüche.

Es sei 0,25637 gegeben. Suchen wir den Logarithmus der zehnmal größeren Hülfszahl 2,5637, so wird dieser durch die Tafeln gegebene Logarithmus die Summe des gesuchten Logarithmus und dessen von 10 (der 1) sein; um das wahre Resultat zu haben, muß

man also von dieser Summe eine Einheit wegnehmen. Der Logarithmus von 2,5637 ist aber kleiner als 1; — wie also eine Einheit von ihm wegnehmen? Diese Schwierigkeit löst sich folgendermaßen: Wächst eine Zahl, d. h. wird sie mit 2, 3, 4 u. s. w. multiplicirt, so sehen wir ihren Logarithmus wachsen. Haben wir aber eine Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, so nehmen wir nicht mehr diese Zahl ganz, sondern wir nehmen nur einen Theil davon. Wir können also ebenso wenig ihren ganzen Logarithmus nehmen. Wir haben also keine Addition mehr, sondern Subtraktion: diese entspricht aber der Division und wir werden sie hier mit der Multiplikation correspondiren lassen. Mit einem Bruche multipliciren, ist vermindern, — durch einen Bruch dividiren, ist vermehren, und wir stellen als allgemeinen Satz hin:

„daß in den Logarithmen die subtraktive Verminderung der „Verminderung entspricht, welche in den Zahlenverbindungen, „sei es durch Multiplikation, sei es durch Division, hervorgebracht wird, — und daß die additive Vermehrung der Vermehrung entspricht, welche aus der Multiplikation oder aus „der Division der Zahlen hervorgeht."

Es ist ungenau, zu behaupten, daß die Multiplikation beständig der Addition entspricht und die Division der Subtraktion; man muß es so ausdrücken, daß, wenn eine Zahl wächst, auf welche Art dies auch geschehen möge, ihr Logarithmus durch Addition wachsen muß, und daß in dem Maße, wie sie abnimmt, auf welche Art dies auch geschehen möge, ihr Logarithmus sich durch Subtraktion vermindern muß. Der Logarithmus eines jeden Bruches muß demgemäß als subtractiv im Falle der Multiplikation (welche Verminderung bewirkt) und als additiv im Falle der Division (welche Vermehrung bewirkt) angesehen werden; d. h. unter der Eins folgt man der umgekehrten Regel von der, welche man über der Eins befolgt. Man hat eine besondere Klasse aus diesen Zahlen gebildet, welche sich in dem Falle subtrahiren müssen, wo alle andern sich addiren müssen; Zahlen, deren gewöhnlicher Zustand subtraktiv ist im Gegensatze zu dem der andern, welchen man additiv nennt. Man hat sie mit dem Namen

negative Zahlen bezeichnet, während man die andern positive nennt; — jene Verminderung, diese Vermehrung bewirkend. Eine wirkliche Subtraktion ist leicht zu verstehen; weniger leicht verständlich ist diese subtraktive Eigenschaft, welche gewissen Zahlen innewohnt und thätig wird, sobald die Vereinigung dieser Zahlen mit andern Zahlen es erlaubt, bis dahin aber ohne Wirkung bleibt. Wir werden übrigens weitere Erklärungen über diesen Gegenstand geben, sobald wir zu den algebraischen Begriffen kommen werden; das bisher Gesagte wird für den Augenblick genügen. — Wir suchten den Logarithmus eines Bruches; dieser Logarithmus, wie wir wissen, muß negativ oder subtraktiv sein. Unsere Hülfszahl gibt uns einen positiven Logarithmus, der kleiner als die Eins ist; — um den verlangten Logarithmus daraus abzuleiten, hätte man von dieser positiven Zahl eine ganze Einheit wegnehmen müssen. Hierbei waren wir stehen geblieben, und fahren nun fort. Wenn wir nicht die ganze Einheit wegnehmen können, so können wir doch wenigstens einen Theil der Einheit subtrahiren, der dem Logarithmus gleich ist, von welchem die Subtraktion geschehen soll, und dadurch diesen Logarithmus annulliren. Es bleibt uns der andere Theil der Einheit, welchen wir nicht subtrahirt haben, da es an der Zahl fehlte, von der man hätte subtrahiren können. Dieser letzte Theil muß also so lange seine subtraktive Eigenschaft behalten, bis eine Zahl erscheint, von welcher die Subtraktion möglich wird. Das ist aber gerade unser negativer Logarithmus. Das Endresultat konnte, wie wir zum Voraus wußten, kein anderes als eine subtraktive Zahl sein.

Was die gewöhnlichen Brüche anbetrifft, so ist ihr Logarithmus leicht zu finden. Der Zähler würde nicht kleiner sein können, als die Einheit, — der Nenner ist immer größer; die Tafeln geben uns also ihre Logarithmen. Zum Logarithmus des Quotienten kommen wir, indem wir den Logarithmen des Divisors von dem des Dividendus subtrahiren. Da die Subtraktion sich nicht vollständig bewirken läßt, so deuten wir sie nur an, und erwarten, daß eine weitere und neue Zahlenverbindung sie möglich mache.

§ 36. Wir wissen nun die Logarithmen aller möglichen Zahlen zu finden. Die Einen sind, wie wir gesehen haben, negativ, die andern positiv. Beide können als Charakteristik alle ganzen Zahlen haben von 0 an. Das ist aber noch nicht genügend. Man muß ebenso, welchen Logarithmus man auch habe, die Zahl, welcher er angehört, auffinden können. Sobald der gegebene Logarithmus positiv ist, und seine Charakteristik 3 nicht überschreitet, wird die Tabelle uns unmittelbar die zugehörige Zahl, den Numerus des Logarithmen, geben. Anders ist es, wenn ein negativer Logarithmus oder ein solcher positiver gegeben ist, dessen Charakteristik über 3 hinausgeht. — Ebenso, wie, um die Logarithmen der über 10000, oder unter 1 liegenden Zahlen aufzufinden, wir zu den zwischen 1 und 10000 liegenden Hülfszahlen unsere Zuflucht nahmen, ebenso werden wir, um die Zahlen (Numeri), welche den negativen Logarithmen oder den positiven mit einer Charakteristik, welche größer als 3 ist, entsprechen, aufzufinden, Logarithmen zur Hülfe nehmen, die in der Tabelle stehen und in der nachfolgenden Art verfahren. Eine oder zwei oder drei u. s. w. Einheiten von einem Logarithmus wegnehmen oder ihm zufügen, heißt ihn mit einer zehn, hundert, tausend u. s. w. mal kleineren oder größeren Zahl (numerus) correspondiren lassen. Ist der Logarithmus positiv, seine Charakteristik 7, so führt man diese durch eine Subtraktion von 4 Einheiten auf 3 zurück. Alsdann gehört der Logarithmus zu einer 10000 mal kleineren Zahl, als die gesuchte. Wir finden diesen Numerus in der Tabelle, und es ist uns leicht, daraus eine 10000 mal größere Zahl herzustellen.

Ist der Logarithmus negativ, so fügen wir ihm so viel Einheiten zu, daß er positiv wird; alsdann wird er sich in der Tabelle finden lassen. Haben wir z. B. (— 5,65249), so verbinden wir durch Addition mit diesem Logarithmus die Zahl 6, welche größer als er ist. Es wird sich alsbald seine subtraktive Eigenschaft bemerkbar machen, und aus der Verbindung wird hervorgehen:

$$6{,}00000 - 5{,}65249 = 0{,}34751.$$

Dies ist ein positiver Logarithmus, der sich in den Tafeln findet und einer eine Million mal größeren Zahl zugehört. Von dieser Hülfszahl

ist der Uebergang zur gesuchten Zahl leicht. Wir konnten, indem wir 9 statt 6 addirten, einen Hülfslogarithmus 3,34751 erhalten, der vom vorigen verschieden ist, und einer um 1000000000 mal größeren Zahl angehört, als die gesuchte ist; wir würden mit derselben Leichtigkeit zum Ziele gekommen sein, und die Charakteristik 3 hätte uns den Vortheil gegeben, durch eine Potenz von 10 eine Zahl von mehr Ziffern dividiren zu können, was uns Decimalen verschiedener Ordnungen gegeben haben würde, während wir durch Benutzung des ersten Hülfslogarithmus nur die erste dieser Decimalen erhalten haben.

Wir haben vorausgesetzt, daß jeder positive Logarithmus, dessen Charakteristik nicht über 3 hinausging, sich in den Tafeln befinde; diese Voraussetzung ist nicht ganz genau, denn meistentheils findet sich ein gegebener Logarithmus zwischen zwei Logarithmen der Tabelle; man muß dann, um den zugehörigen Numerus aufzufinden, das Verfahren einschlagen, dessen wir uns zuvor bedient haben, um den Logarithmus einer Zahl, welche zwischen zwei Zahlen der Tafeln fiel, aufzufinden. Man schreibt dieselbe Gleichung von Verhältnissen, mit diesem Unterschiede, daß nicht mehr der Zuwachs des Logarithmen, der mit einem Zuwachse der gegebenen Zahl correspondirt, unbekannt ist, sondern der Zuwachs der Zahl, welcher dem des Logarithmus entspricht. Suchen wir (durch Subtraktion) den Unterschied des gegebenen Logarithmus und des unmittelbar darunter liegenden Logarithmus, und drücken ihn durch a aus; andererseits gibt die dritte Colonne unserer Tabelle uns den Zuwachs an, welchen dieser untere Logarithmus erfährt, sobald die ihm entsprechende Zahl um eine Einheit wächst. Wir wollen diesen Zuwachs mit b bezeichnen. Das Verhältniß der beiden uns bekannten Zuwachse ist $\frac{1}{b}$, das Verhältniß derer, von denen der eine uns unbekannt ist, ist $\frac{x}{a}$. Beide Verhältnisse setzen wir einander gleich, und haben:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{b}\text{, woraus sich}$$

$$x = \frac{a}{b}\text{ ergibt.}$$

Auf diese Weise wissen wir, was der Zahl zugefügt werden muß, welche dem unmittelbar tiefer liegenden Logarithmus entspricht, um den gesuchten Numerus zu erhalten.

§ 37. Bisher haben wir das Mittel an die Hand gegeben, der Multiplikation und Division eine gleiche Anzahl von einfacheren und sich in derselben Ordnung folgenden Operationen zu substituiren. Sollte nicht eine fernere Vereinfachung möglich sein? Wenn wir z. B. den Logarithmus a zu subtrahiren haben, so würde, diese Subtraktion vernachlässigen, so viel sein als das Resultat um Alles das vergrößern, was wir nicht von ihm fortnehmen würden. Wir merken uns nun jede der Zahlen, um welche unser Resultat in solcher Art wächst, und machen am Schlusse alle vernachlässigten Subtraktionen zusammen. Man könnte, ohne Etwas abzukürzen, bloß die Reihefolge der Operationen ändern, aber man hat sich darauf nicht beschränken wollen. Wenn alle schließlich zu subtrahirenden Zahlen dieselben wären, so würden alle subtraktiven Operationen sich auf eine einzige zurückführen, auf die einzige Subtraktion eines Vielfachen der Zahl, deren Subtraktion man mehrere Male unterlassen. Könnte man nicht aber alle aus den vernachlässigten Subtraktionen hervorgehenden Zuwachse gleich machen? Allerdings. Einer der Zuwachse sei a, der von der Zahl 10 um eine bestimmte Größe differirt (diese Größe ist leicht zu finden; man darf nur die erste Ziffer rechts von a von 10 subtrahiren und alle anderen von 9); anstatt a zu subtrahiren, addiren wir diese Differenz (das arithmetische Complement). Statt am Schlusse a subtrahiren zu müssen, subtrahiren wir 10. Kommt eine neue Subtraktion, so lassen wir sie gleichfalls aus, und addiren das arithmetische Complement, d. h. das was der zu subtrahirenden Zahl zur Zehn fehlt. Am Schlusse ist dann wieder eine Subtraktion von 10 zu bewirken, was mit der vorhergehenden eine einzige Subtraktion von 2 mal 10 macht, und so fort.

Wir kehren jetzt zu der Anwendung der Proportionen oder Gleichungen von Verhältnissen zurück.

Gebrauch der Proportionen.

§ 38. Anwendung der Proportionen. Man nennt Maß einer Größe das numerische Verhältniß dieser Größe zur Einheit derselben Art. Das Maß einer Fläche z. B. ist das Zahlenresultat der Vergleichung dieser Fläche mit der Einheit von Fläche, d. h. die Anzahl Male, welche die Einheit sich in dieser Fläche wiederholt findet. Nehmen wir den Millimètre als Längeneinheit, so wird das Maß irgend einer Länge die Zahl sein, welche ausdrückt, wie viel Millimètres diese Länge enthält. Haben wir als Flächeneinheit ein kleines Quadrat von einem Millimètre Seitenlänge gewählt, so heißt eine beliebige Fläche messen, untersuchen, wie viel Male diese Einheit sich in der Fläche befindet.

§ 39. Die Proportionen können, wie wir sogleich sehen werden, uns dazu dienen, eine Menge von Größen mit Hülfe von schon gemessenen Größen zu messen, oder eine Menge unbekannter Größen mit Hülfe anderer schon bekannter Größen aufzufinden.

Zunächst wollen wir die verschiedenen Arten von Verbindungen darlegen, welche Größen mit einander verknüpfen. Es gibt eine erste Verbindung zwischen allen Größen derselben Natur; sie ist nur conventionell; sie setzt zwischen diesen Größen eine Art von Verkettung und Zusammenhang, eine Art von Geschlechtsfolge, fest, — denn sie betrachtet alle diese Größen wie durch Zuwachs aus dem Vergleichungsgliede abgeleitet, worauf man sie bezieht, sie sieht dieselben folglich nur an als besondere Werthe ein und derselben veränderlichen Größe. — In solcher Weise werden alle Flächen, wo und wie sie auch zu einander in Beziehung treten, als Variationen ein und derselben Flächeneinheit angesehen, aus der sie durch successives Wachsen entstanden sind. Diese Verbindung theilt die Größen in große Gruppen oder Reihen, deren jede alle die von derselben Natur in sich begreift.

Eine andere Verbindung, welche wir die natürliche nennen

möchten, verknüpft mit einander diese soeben genannten Reihen, und läßt sie paarweise neben einander hergehen, dergestalt, daß in dem Ganzen des einen dieser Reihenpaare die Glieder einer Reihe beständig den entsprechenden Gliedern der andern vorausgehen, so wie die Ursache ihrer Wirkung vorangeht. Wir werden deshalb, jedesmal, wenn sich mehrere Reihen von Variationen zeigen, die von einander abhängen, denen, welche die Priorität haben, den Gattungsnamen der ursachlichen Variationen oder Ursachen der Variationen, oder schlechtweg Ursachen geben, und den andern den Namen Wirkungen (Effekte) der Variationen, oder schlechtweg Wirkungen (Effekte). Doch verstehe man diese Ausdrücke keineswegs buchstäblich. Wenn dies in einzelnen Fällen auch möglich wäre, so wäre es im Allgemeinen unrichtig; z. B. die Arbeitsmenge oder die Größe einer Arbeit variirt mit der darauf verwendeten Zeit; die Variation der Zeit ist die frühere, — wir nennen sie deshalb die Ursache, — und man sieht an diesem Ausdrucke, daß er, hier in seinem gewöhnlichen Sinne genommen, gänzlich ungenau wäre. Bei dem Gebrauche dieser Wörter Ursachen und Wirkungen haben wir nur den Zweck, kurz die Ordnung zu bezeichnen, in welcher sich mehrere unter einander verknüpfte Variationen uns zeigen; die Benennung Ursache soll nichts anderes als nur die Priorität anzeigen. Diese Priorität nun ist nicht als eine sinnlich wahrnehmbare, sondern als eine geistig erfaßte, eine rationelle Priorität zu verstehen; ungeachtet der scheinbaren Gleichzeitigkeit mehrerer Variationen gibt es in Wahrheit eine, wenn auch unendlich kleine, Entfernung zwischen dem Anfange der einen und dem der andern.

§ 40. In dieser letzteren Art von Verbindungen gibt es eine bemerkenswerthe, welche die beiden unter sich verbundenen Reihen gewissermaßen nöthigt, den gleichen Schritt zu gehen, demselben Gesetze zu gehorchen. Es gibt eine große Menge von Reihen, deren correspondirende Glieder gleichzeitig doppelt, dreifach u. s. w. werden, oder deren eine doppelt, dreifach u. s. w. werden, während die anderen die Hälfte, das Dritttheil u. s. w. dessen werden, was sie am gemein-

samen Ausgangspunkte waren. Dies nennen wir: demselben Gesetze gehorchen. — Diese besondere Verknüpfung ist die einzige, von der wir Gebrauch machen werden; sie wird uns, mittelst der Gleichungen von Verhältnissen, zu denen sie führt, eine Menge von unbekannten Gliedern von Reihen, welche ihr gehorchen, auffinden helfen. Wenn wir eine unbekannte Größe messen wollen, welche einer Reihe sich einfügt, die wir von einer andern demselben Gesetze unterworfenen begleitet wissen, so können wir es, sobald diejenige Größe, welche ihr in dieser andern Reihe entspricht, bekannt oder gemessen ist, und wenn wir außerdem noch die Maße eines anderen Paares correspondirender Glieder kennen. Wir verweisen, wegen weiterer Ausführung, auf das in dem § 17 ꝛc. über Verhältnisse und Proportionen Gesagte, wo man ersehen wird, wie wir aus der Identität des Gesetzes auf die Gleichheit aller Quotienten oder Verhältnisse geschlossen haben, die man mit den correspondirenden Gliedern jeder Reihe bilden wollte, sobald man nur Sorge trägt, den Gliedern der einen ausschließlich die Rolle des Dividendus, und den entsprechenden Gliedern der andern die Rolle des Divisors zuzutheilen.

§ 41. Da die Aenderung der Wirkung proportionirt der Aenderung der Ursache (eine Bedingung, welche uns in sehr vielen Fragen der Physik entgegentritt) ist, so gibt uns dies das Mittel an die Hand, die aus einer bestimmten Ursache hervorgehende Wirkung aufzufinden, wenn wir den Effekt kennen, welchen einer der Werthe dieser als veränderlich gedachten Ursache hervorbringt. Das geht sehr gut, so lange wir nur zwei Reihen haben, d. h. wir finden leicht das Maß der Wirkung, so lange es nur Eine Ursache der Veränderung gibt. Handelt es sich aber um einen Effekt, der dem Einflusse mehrerer gleichzeitig wirkender Ursachen zuzuschreiben ist, so werden wir denselben mit eben so vieler Leichtigkeit als die vorhergehenden messen können, wenn wir wissen, daß von allen Ursachen der Veränderung, welche auf ihn einwirken können, eine jede, wenn sie allein wirkte, eine Veränderung hervorbringen würde, derjenigen proportional, welche sie selbst oder eine ihrer Modifikationen erfahren würde. Ein

Beispiel wird das eben Gesagte deutlicher machen. Die Erwärmung einer Fläche variirt gleichzeitig mit der Entfernung von dem Sitze der Wärme; sie nimmt aber nicht in demselben Verhältnisse ab, wie die Entfernung wächst. Die Erfahrung lehrt, daß die Wärmeabnahme umgekehrt dem Quadrate der Entfernung proportionirt ist. Das Quadrat der Entfernung bezeichnen wir als modificirte Ursache. Alle Ursachen, welche auf denselben unbekannten Effekt einwirken sollen, werden entweder gleichzeitig oder nach einander wirken. Wirken sie nach einander, so findet keine Schwierigkeit Statt: eine jede wirkt, wenn die Reihe an sie kommt, mit der ganzen Kraft, und die aus jeder Einwirkung resultirende Modifikation wird durch eine einfache Proportion gegeben. Man hat folglich eben so viele auf einander folgende Proportionen zu schreiben, als es Ursachen gibt. — Anders bei der Gleichzeitigkeit der wirkenden Ursachen. Jede derselben würde, wenn sie allein wirkte, eine Veränderung hervorbringen, die ihrer eigenen proportional wäre: gleichzeitig mit den andern Ursachen wirkend, kann sie in ihrer Wirkung gehemmt, ja selbst in die Unmöglichkeit versetzt werden, ihre ganze Kraft zu üben. Unser Geist würde indessen nicht mehrere Einwirkungen als gleichzeitig neben einander hergehend fassen können, sondern immer genöthigt bleiben, diese verschiedenen Einwirkungen als nach einander folgende zu betrachten. Es könnte nun scheinen, als ob man in diesem, wie in dem vorhergehenden Falle, nicht sicher sei, zum wahren Resultate zu kommen, da man auf die aus der Gleichzeitigkeit der Ursachen erwachsenden Schwierigkeiten keine Rücksicht nimmt. Es ist indeß leicht einzusehen, daß die Folge der verschiedenen wirkenden Ursachen dasselbe Resultat ergeben muß, als die Gleichzeitigkeit derselben. Sobald zwei Ursachen zu gleicher Zeit wirken, und eine jede bringt nicht die ganze Wirkung hervor, welche sie, isolirt wirkend, gehabt haben würde, so war irgend ein Theil ihrer Kraft neutralisirt, da ein gleicher Theil entgegenwirkender Kraft der andern Ursache sie hinderte, ihren ganzen Effekt hervorzubringen. Der Gegensatz allein zerstörte die Wirkung. — Die Veränderung, welche durch Substituirung der Aufeinanderfolge an Stelle der Gleichzeitigkeit der wirkenden Ursachen herbeigeführt ist,

besteht nur darin, daß der Theil, welcher neutralisirt worden wäre, es nicht ist, und eine Wirkung hervorbringt, die nicht sich hätte zeigen sollen. Es tritt sodann die ganze Action der zweiten Ursache ein; der Theil dieser Ursache, welcher gedient haben würde, die vorhergehende zu neutralisiren, indem er sich selbst neutralisirt hätte, bringt gleichmäßig seine Wirkung hervor: eine neue Veränderung, aber eine Veränderung, die gleich und entgegengesetzt der ersten ist, die sie durch ihren Gegensatz verschwinden machen wird, indem sie mit ihr verschwindet. Die Aufeinanderfolge zeigt uns also Hervorbringung und Zerstörung einer Wirkung, während die Gleichzeitigkeit nur die Neutralisirung ihrer Ursache gezeigt hätte. Das Resultat ist auf der einen wie auf der andern Seite augenscheinlich dasselbe; der einzige Unterschied ist der, daß in der Voraussetzung nach einander folgender Actionen man auf einem längeren und gewundenen Wege zum Ziele kommt. Wählt man diesen weiteren Weg, so geschieht es, weil man auf dem direkten Wege nicht zum Ziele gelangen kann.

§ 42. Jedes Mal nun, wo wir eine Wirkung zu messen haben, welche dem Einflusse mehrerer Ursachen unterworfen ist, die gleichzeitig oder successiv so wirken, daß eine jede, wäre sie isolirt, Variationen hervorbringen würde, die ihren eigenen proportionirt wären, — werden wir voraussetzen, daß die verschiedenen Actionen nach einander wirken und eine jede, der Reihe nach, das Resultat modificiren. Jede neue Modifikation wird durch eine einfache Proportion erhalten. — An mehreren Beispielen wollen wir dies Princip klar machen.

§ 43. Erstes Beispiel. Ein Fuhrmann durchfährt von Zeit zu Zeit dieselbe Straße; er fährt im Sommer täglich 11 Stunden, und macht in 5 Tagen 63 Lieues. Im Winter hindert der schlechte Zustand der Wege ihn, mehr als 42 Lieues zurückzulegen; seine tägliche Fahrt dauert 7 Stunden und die Geschwindigkeit seines Fuhrwerks ist nur $\frac{3}{5}$ derjenigen zur guten Jahreszeit. Wie viel Tage bleibt er unterwegs?

Analysiren wir die Frage, so erkennen wir darin drei Ursachen der Veränderungen, welche zugleich auf das gesuchte Resultat einwirken:

1°. Die Abnahme des durchmessenen Raumes, die, allein betrachtet, die Zahl der Tage proportionell kleiner werden lassen würde;

2°. Die Abnahme der Zeit des täglichen Weges, welche in demselben Verhältnisse die Zahl der Tage wachsen lassen, d. h. sie in umgekehrtem Verhältnisse ändern würde;

3°. Die Abnahme der Geschwindigkeit, welche ebenfalls eine umgekehrt proportionale Veränderung bewirken würde.

Eine erste direkte Proportion zwischen der Zahl der Tage und dem durchmessenen Raume gibt den Unbekannten x unter einer ersten Modifikation:

$$\frac{63}{5} = \frac{42}{x}, \text{ also } x = \frac{5 \cdot 42}{63}.$$

Wir bezeichnen diesen Werth mit a.

Eine zweite, aber umgekehrte Proportion zwischen der Zahl der Tage und der Zeit des täglichen Weges führt uns den Unbekannten noch in einer zweiten Modifikation vor:

$$\frac{a}{x} = \frac{7}{11}, \; x = \frac{a \cdot 11}{7} = \frac{5 \cdot 42 \cdot 11}{7 \cdot 63}.$$

Diesen neuen Werth bezeichnen wir der Kürze wegen durch b.

Endlich wird in einer dritten Proportion, die wie die vorhergehende eine indirekte ist, zwischen der Zahl der Tage und der Geschwindigkeit, eine dritte Modifikation für den Unbekannten gegeben:

$$\frac{b}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5}, \text{ oder } x = \frac{5 \cdot b}{3}.$$

$$\text{also} \quad x = \frac{5 \cdot 5 \cdot 42 \cdot 11}{3 \cdot 7 \cdot 63} = 8\tfrac{46}{63}.$$

Dies ist die gesuchte Zahl der Tage.

§ 44. Zweites Beispiel.

Gesucht wird das Maß einer Fläche, die in folgender Weise beschrieben ist:

Wir legen das Lineal ABCD (Fig. 1.), dessen vordere Kante AB an jedem Ende mit einer Spitze versehen ist, A und B, auf einen Tisch, ziehen in der Richtung AB eine Linie GH, die uns eine erste Gränze gibt, und lassen nun das Lineal sich mit einer für alle seine Punkte gleichen Geschwindigkeit dergestalt fortbewegen, daß sie alle in gleicher Zeit gleiche Wege durchlaufen. Die Spuren (so zu sagen) AE, BF, welche die beiden Spitzen der Kante AB hinter sich lassen, in Verbindung mit einer vierten Linie IK, die bei einer neuen Station EF der vorderen Kante des Lineals gezogen worden ist, schließen einen Theil der ebenen Fläche des Tisches ein.

In Betreff der Gränzen dieser kleinen Fläche wollen wir, ehe wir weiter gehen, einige Bemerkungen machen.

Die beiden Linien AE, BF sind gleich, weil sie die Wege zweier Punkte sind, die sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen; da außerdem sie aus den nach einander eingenommenen Stellungen der beiden Punkte, die je zwei und zwei sich entsprechen, bestehen, so können wir hinzufügen, daß sie auf ihrer ganzen Länge gleich weit von einander abstehen. Endlich, bei dem Fortbewegen des Lineals verhalten sich seine beiden äußersten Enden bezüglich der Ausgangslinie AB völlig gleich und zeigen bei ihrer Bewegung dieselben Verhältnisse, und es ist auch in der That kein Grund, daß dies anders sei. Die beiden Wege AE und BF sind gleichmäßig nach derselben Seite, z. B. nach rechts, gegen die Linie AB geneigt, was wir dadurch ausdrücken, daß wir die beiden Winkel EAB und FBH als einander gleich bezeichnen. (Man nennt Winkel zweier Linien die Neigung der einen gegen die andere, und benennt, um diesen Winkel zu bezeichnen, nach einander einen Theil jeder der beiden an ihrem Begegnungspunkte (dem Scheitel des Winkels) endenden Linien; den Buchstaben des Scheitelpunktes nennt man nur ein Mal, statt ihn zwei Mal zu nennen.) Ebenso ist auch der Winkel EAG dem Winkel FBA gleich. Diese Eigenschaft hängt daran, daß die beiden äußersten Punkte des Lineals ihre Stellung gegen einander nicht ändern können, sondern nur ihre Stellung gegen die Ausgangslinie. Es folgt daher, daß zwei gleich weit von einander abstehende Linien in allen ihren Punkten

gleichmäßig gegen jede der Linien geneigt sind, welche sie beide auf einmal treffen; — und man kann umgekehrt sagen, daß zwei gegen eine dritte Linie gleichmäßig geneigte Linien in ihrer ganzen Länge gleich weit von einander abstehen. Diese Linien-Paare heißen parallele Linien oder bloß Parallelen.

Die Linien AB und EF haben auch eine gleiche Länge, die Länge des Lineals. Sie sind ferner in allen Punkten gleich weit von einander entfernt, und werden also in gleicher Weise gegen die Linien MI, ON, die sie treffen, geneigt sein, — mit andern Worten, sie sind parallel.

Wir können hier gleich für spätere Anwendungen die Bemerkung machen, daß zwei Paare von Parallelen, die sich schneiden, gegenseitig immer gleiche Stücke abschneiden.

Die durch vier Linien, deren je zwei parallel sind, eingeschlossene Fläche heißt ein Parallelogramm. Nehmen wir an, daß die Bewegung des Lineals eine solche war, daß der Weg der beiden Spitzen gegen die Linie AB nicht mehr zur Linken als zur Rechten geneigt war, so bilden sich rechts wie links rechte Winkel; — die Figur nimmt wegen der Gleichheit der vier Winkel EAB, ABF, BFE, FEA (Fig. 2.) den besonderen Namen des Rechtecks an. Sind außerdem, daß die vier Winkel gleich sind, auch die vier Seiten unter einander gleich, so heißt das Viereck ein Quadrat. Diese letzte Fläche ist die einfachste; zu ihrer Construction genügt es, eine Seite zu kennen; das Rechteck erfordert zwei Seiten; das Parallelogramm im Allgemeinen, verlangt zu seiner Construction außerdem noch die Kenntniß eines Winkels.

Wir wollen das Rechteck messen, indem wir als Vergleichungs-Glied oder als Flächen-Einheit das kleine Quadrat nehmen, das die Längen-Einheit zur Seite hat.

Wir bemerken zunächst, daß wir, wenn das Lineal den doppelten Weg von AE durchlaufen hätte, eine doppelte Fläche haben würden. Das neue Stück Fläche, welches man erhalten hätte, würde, auf das erste Stück gelegt gedacht, dieses gänzlich gedeckt haben. Es würde also eine direkte Proportionalität zwischen den Variationen von AE

bestehen, d. h. des senkrecht durchlaufenen Weges des Punktes A (eine senkrechte Linie ist die, welche mit einer anderen zwei rechte Winkel bildet, also nicht mehr nach rechts als nach links geneigt ist), und denen der beschriebenen Fläche.

Andererseits, wenn wir uns vorstellen, daß die Linie AE gegeben sei durch eine Stellung eines Lineals, das von der Linie BF aus sich vorwärts bewegt habe, so sehen wir, daß die Fläche ABFE doppelt so groß geworden sein würde, wenn das Lineal das Doppelte des zu BF senkrechten Weges AB durchlaufen hätte. Es würde also abermals eine direkte Proportionalität zwischen den Variationen von AB und denen der Fläche bestehen.

Wir bemerken also zwei Ursachen, mit welchen die Fläche, veränderlich gedacht, proportionell sich verändern würde. Um also das Rechteck zu messen, muß man annehmen, daß es nichts anderes sei, als ein fortschreitendes Wachsen der Flächeneinheit, durch das Wachsen von AB, welches ursprünglich die Längeneinheit war, und durch das von AE, dessen anfängliche Länge ebenfalls die Einheit war, hervorgerufen.

Welchen Effekt nun würde auf die Flächeneinheit die isolirte, einseitige, Veränderung der Basis dieser Einheit hervorbringen? Sie würde dieselbe ihrem eigenen Zuwachse proportionell wachsen machen, d. h. das numerische Verhältniß der neuen Fläche zu derjenigen, von welcher man ausging, also zur Flächeneinheit, würde dasselbe sein, wie das der neuen Basis zur ursprünglichen Basis, oder zur Längeneinheit; mit andern Worten, die neue Fläche, welche wir durch y bezeichnen, würde bezüglich der ersten Fläche dasselbe Vielfache sein wie die neue Basis bezüglich der ersten. — Ist nun die neue Basis gleich b Längeneinheiten, so wird die neue Fläche gleich b Flächeneinheiten sein. Wenden wir uns nun zu dem Effekte, welchen auf die Fläche b, die wir erhalten haben, die isolirte Aenderung der Höhe hervorbringen müßte. Der Zuwachs würde ebenfalls proportionell sein; die Fläche x (diejenige, welche gemessen werden soll) würde bezüglich der Fläche b dasselbe Vielfache sein, wie die Höhe h es bezüglich der ersten Höhe, welche Längeneinheit ist, war. Da wir also in der neuen

Höhe h Längeneinheiten haben, so haben wir gleichfalls in der neuen Fläche h mal die Fläche b, von der wir ausgehen, oder h mal b Flächeneinheiten, d. h. h.b Flächeneinheiten. Die Fläche ist also gemessen, und zwar wird ihr numerisches Verhältniß durch das Produkt von Basis und Höhe ausgedrückt.

In Betreff der Flächeneinheit, für die unsere Schlußfolgerung so eben keine bestimmte Größe angenommen hat, kann man stets so wählen, daß ihre Seite oder Längeneinheit eine ganze Zahl Male in der Höhe und in der Grundlinie enthalten ist. Man wird freilich mitunter solchen Längen begegnen, für deren Vergleichung man keine hinreichend kleine Einheit finden würde; so z. B. die Seite eines Quadrats und dessen Diagonale, d. h. die Linie, welche von einer Winkelspitze bis zur gegenüberliegenden das Quadrat durchschneidet (wir werden weiterhin sehen, wie man bei diesen beiden Linien, wie bei mehreren andern, die Eigenschaft aufgefunden hat, incommensurabel zu sein, d. h. nicht ein und derselben Einheit verglichen werden zu können). Die Analogie führt alsdann dazu, dem allgemeinen Falle diese besondern, übrigens seltenen, Fälle anzupassen, — und, in der That, wenn man dahin kommt, eine äußerst kleine Einheit zu benutzen, welche dem Maße einer der Längen entspricht, vorausgesetzt, daß die andere Länge unendlich wenig kleiner oder größer sei, so wird sie ebenfalls entsprechen. Wenn man also wirklich, indem man die Fläche mißt, als ob zwischen ihren Seiten Commensurabilität bestände, nicht das genaue Maß erhielte, so würde man doch immer es mit einer so großen annähernden Genauigkeit haben als man will, — und es ist somit die Uebertragung dieser Fälle auf den allgemeinen Fall gerechtfertigt.

§ 45. Bei'm Auffinden des Maßes haben wir keine Gleichungen von Verhältnissen angewendet, sondern sind durch einfache Betrachtungen zum Ziele gekommen, die sich unmittelbar aus der Definition proportioneller Veränderungen ergaben. Für zwei Größen heißt proportionell verändern nichts anderes, als auf einmal das Doppelte, Dreifache u. s. w., das Dritttheil, Viertheil u. s. w. ihrer

ursprünglichen Größe werden, d. h. dieselben Vielfachen dessen, was sie waren, als sie sich zu ändern anfingen. Es folgt daraus, daß, wenn man ein Paar zu einander gehöriger Werthe a und b dieser Größen (Werthe, welche als Ausgangspunkt für die Veränderungen dienen) kennt, und außerdem einen einzigen der Werthe b′ eines andern Paares (die gleichen Buchstaben deuten die Größen derselben Natur an), so wird der unbekannte Werth x dieses zweiten Paares bezüglich a dasselbe Vielfache sein, als b′ bezüglich b ist. Dividiren wir b′ durch b, so wird der Quotient die Zahl sein, mit welcher man b multipliciren müßte, um b′ zu haben, und gleichzeitig der, mit dem man a zu multipliciren hätte, um x zu erhalten; z. B.

3 Arbeiter haben 36 Mètres einer bestimmten Arbeit gemacht; — das ist ein erstes Paar von Werthen. Wie viel Arbeit werden 15 Arbeiter machen? Das ist ein einziger Werth eines zweiten Paares. Da dieser Werth 5 mal den Werth derselben Natur im ersten Paare ausmacht, so muß der unbekannte Werth des zweiten Paares, d. h. die von 15 Arbeitern gelieferte Menge von Mètres Arbeit, gleich 5 mal 36 Mètres = 180 Mètres sein.

Wenn wir, in den ersten Aufgaben, statt diesem Gange zu folgen, die Gleichungen von Verhältnissen angewendet haben, so geschah es, weil wir, ehe von der Anwendung der Gleichungen zum allgemeinen Aufsuchen unbekannter Größen geredet werden konnte, glaubten, an ihre Anwendung jedes Aufsuchen derselben Art knüpfen zu müssen. Die Resultate sind übrigens, wie sich denken läßt, immer die nämlichen, wie man auch zu ihnen komme. Durch die voranstehenden Betrachtungen haben wir b . b als Maß des Rechtecks gefunden; die Methode der Gleichungen wird zu demselben Ausdrucke führen. Ein erstes Verhältniß ist das der Flächeneinheit zu ihrer Basis, welches die Längeneinheit ist; ein zweites Verhältniß, welches, wie wir wissen, nur ein anderer Ausdruck des vorhergehenden ist, wird das von y, oder der durch Wachsthum der Grundlinie gewachsenen Fläche zu dieser Grundlinie b sein. Die Gleichung ist:

$$\frac{\text{Flächeneinheit } 1}{\text{Längeneinheit } 1} = \frac{y}{b}, \text{ woraus } y = b \text{ folgt.}$$

Die Verhältnisse, welche die zweite durch das Wachsen der Höhe nöthig gewordene Gleichung bilden, sind:

1°. Verhältniß der Fläche b zu ihrer Höhe, welche Längeneinheit ist;

2°. Verhältniß von x, der gegebenen Fläche, welche aus dem Wachsen der Fläche b durch Aenderung der Höhe entstanden ist, zu dieser neuen Höhe h.

Die Gleichung ist:

$$\frac{b}{1} = \frac{x}{h}, \text{ woraus } x = b \cdot h$$

folgt.

§ 46. Ehe wir weiter gehen, möge eine Bemerkung über den Abstand, die Entfernung, zweier paralleler Linien von einander hier ihren Platz finden. Der Abstand eines Punktes von einem andern ist die Linie, welche beide Punkte verbindet. So lange wir die Parallelen als aus correspondirenden Punkten bestehend ansahen, sahen wir als ihren Abstand denjenigen zweier dieser Punkte an. Finden wir aber nun zwei von einander unabhängige Parallelen, so können wir darin nicht mehr correspondirende Punkte erkennen, und es steht uns frei, eine beliebige Zusammengehörigkeit festzusetzen. Die Abstände bald auf die eine, bald auf die andere Art neigen, hieße uns jedem Gesetze in der Bestimmung der Zusammengehörigkeit entziehen, die Vergleichung der Abstände noch durch die Vergleichung ihrer Neigungen verwickelter machen. Statt dessen ist man übereingekommen, die Zusammengehörigkeit der Punkte in der Art anzunehmen, daß alle Abstände eine gemeinsame Neigung haben, die dann ein für allemal außer besonderer Beachtung bleiben kann. Als einfachste Neigung, am leichtesten und ohne Irrung anzuwenden und darzustellen, hat man augenscheinlich die senkrechte, welche allgemein angewendet wird, um Abstände der Linien von einander, oder der Punkte von Linien zu messen. Die senkrechte Linie hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß sie das Minimum der Entfernung einer Linie von ihrer Parallele ist, die kürzeste aller Entfernungen,

d. h. kürzer als alle schräg liegenden Linien zwischen Parallelen. Diese Eigenschaft kann man leicht in folgender Weise erkennen: Ein über die Wasserfläche gespannter Faden wird horizontal sein; hängt man an das Ende eines andern Fadens ein kleines, zu einer Spitze auslaufendes Gewicht, womit man den ersten Faden berührt, so wird dieser zweite Faden senkrecht zum ersten sein. Sobald man nun ihn ein wenig von seiner vertikalen Lage entfernt, wird der kleine Körper aufhören, den horizontalen Faden zu berühren, was beweist, daß, um jeden schrägen Abstand zu messen, der hängende Faden hätte länger sein müssen.

Die Bedeutung des Wortes Abstand steht nunmehr also fest. Jedes Mal, wenn wir Flächen finden, welche ganz oder theilweis durch parallele Linien begränzt sind, wird der Abstand zweier dieser Linien die Höhe der Flächen genannt, und dem entsprechend wird also eine von beiden die Grundlinie sein. Bei den Flächen, in denen keine solche Parallelität möglich ist, nämlich bei den Dreiecken, wird der Abstand einer der Dreiecksspitzen (Begegnungspunkt zweier Linien) von der gegenüberliegenden Gränze oder Seite den Namen Höhe bekommen. Diese gegenüberliegende Seite, d. h. diejenige der drei Seiten, welche nicht an der Bildung der Spitze, von der die Rede ist, Theil hat, heißt alsdann die Grundlinie. Die Höhe eines Dreiecks ist, wie man sieht, dieselbe wie die eines Parallelogramms, dessen mit der gemeinschaftlichen Grundlinie beider Flächen parallele Seite durch die Spitze des Dreiecks gehen würde.

§ 47. Aus dem Maße des Rechtecks, oder vielmehr aus dem des Quadrats, weil wir ein kleines Quadrat als Flächeneinheit angenommen haben, leiten wir das Maß aller andern Flächen her, indem wir sie mittelbar oder unmittelbar mit der Fläche des Rechtecks vergleichen. Scheinbar würde es einfacher sein, Dreiecke statt vierseitiger Flächen als Ausgangspunkt zu nehmen. Aber auch nur scheinbar; das möglichst einfache Dreieck, das von drei gleichen Seiten und drei gleichen Winkeln, gibt eine Länge und eine Neigung zu berücksichtigen; das Quadrat zeigt nur eine einzige Länge und eine einzige

Neigung, welche über die des Dreiecks den Vortheil hat, die allereinfachste zu sein. Welche der Gränzen man in einem Dreiecke auch als beweglich annehmen wollte, man würde keine proportionellen Aenderungen wahrnehmen können; es würde uns also, wenn wir von dem Dreiecke statt von dem Vierecke ausgehen wollten, die Möglichkeit fehlen, Proportionen zu bilden, mit denen wir dann weiter arbeiten könnten. Die quadratischen und Rechtecksflächen sind die einzigen, welche sich für unsere Mittel der Vergleichung bequem zeigen.

§ 48. Vergleichen wir zunächst mit den rectangulären Flächen die durch vier nicht auf einander senkrechte Linien begränzten Flächen, die Parallelogramme.

Auf der verlängerten Linie AD schneide man zur Linken der Punkte A und D die gleichen Stücke AE und DF ab, verbinde B und C mit E und F durch die Linien BE und CF, so erhält man eine Fläche BCFE, welche dieselbe Grundlinie BC und dieselbe Höhe CD hat, wie das Rechteck BCDA. Diese neue Fläche bietet ein dreiseitiges Stück DCF, das dem Rechtecke fremd ist. Dieses dagegen hat ein dreiseitiges Stück ABE, das sich in der andern Figur nicht befindet. Um also von dem Rechtecke zur zweiten Fläche überzugehen, verliert man das Dreieck ABE und gewinnt das Dreieck DCF. Diese beiden Dreiecke sind aber congruent, da sie je zwei gleiche Seiten haben (AB = DC, AE = DF) und die von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel BAE und CDF einander gleich sind. Würde man beide Dreiecke auf einander legen, so würden sie mit allen ihren Theilen völlig sich decken und zusammenfallen. Es sind daher die beiden Flächen BCDA und BCFE gleich, wenn auch nicht congruent, d. h. sie haben dasselbe Maß, das Produkt der Grundlinie BC mit der Höhe CD. Es ist leicht zu sehen, daß die Fläche BCFE ein Parallelogramm ist, d. h. daß BE und CF parallel laufen, oder gegen eine der beiden Parallelen BC, EF, dieselbe Neigung haben. Die Gleichheit der Neigung gegen EF zum Beispiel, d. h. die Gleichheit der Winkel CFD und BEA folgt aus dem Zusammenfallen der Dreiecke, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden.

Jedes Parallelogramm hat also dasselbe Maß wie das Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

§ 49. Da wir uns jetzt mit den Flächen beschäftigen, welche außer verschiedenen Längen verschiedene Neigungen zeigen, so wollen wir nicht weiter gehen, ohne zuvor die Mittel besprochen zu haben, welche man anwendet, um Neigungen oder Winkel zu vergleichen, d. h. sie zu messen.

Gegen einen Gegenstand geneigt sein, heißt in der gewöhnlichen Redeweise, ein Streben haben, gegen diesen Gegenstand zu fallen, ihn zu erreichen. Denken wir uns einen senkrechten unbiegsamen Stamm, der mit seinem untern Ende auf einer wagerechten Ebene ruht, gegen welche man ihn umlegt. Im ganzen Verlaufe der Bewegung bleibt jeder Punkt dieser Linie beständig in derselben Entfernung von dem Berührungspunkte mit der horizontalen Ebene, d. h. wenn einer der Punkte eine Spur seines Weges hinterließe, so würde dies ein Kreisbogen sein, dessen Mittelpunkt im Berührungspunkte läge. Die Neigung einer Linie gegen eine andere wird sich also durch den größeren oder kleineren Bogen messen, den die Linie zu durchlaufen hätte, um die andere Linie zu erreichen, auf einen Kreis bezogen, dessen Mittelpunkt sich in der Winkelspitze befinden würde (Fig. 4). Es ist klar, daß, wenn man vergleichbare Maße haben will, man in allen Fällen sich eines Kreises von demselben Radius bedienen muß. Später werden wir sehen, wie man sich der steten Anwendung ein und desselben Kreises entschlagen kann.

§ 50. Aus der Anwendung der Bogen zur Winkelmessung folgt, daß das Maß zweier rechter Winkel zusammen ein Halbkreis ist, der eines rechten Winkels ein Viertelkreis, und daß die vereinigten Maße von vier rechten Winkeln einen ganzen Kreis bilden.

Aus diesem Mittel zu messen, indem man den Mittelpunkt des Kreises in die Winkelspitze setzt, leitet man dasjenige ab, zu messen, indem man in die Winkelspitze einen Punkt der Kreisgränze, der Peripherie setzt, und den Kreismittelpunkt auf eine der Linien.

So ist (in Fig. 5) die Lage des Winkels EDC. Zieht man durch den Mittelpunkt des Kreises BF parallel DE, so daß der Winkel GAB dem Winkel GDE gleich wird, so ist Bogen BC das Maß des Winkels; — es bleibt noch sein Verhältniß zu dem zwischen den Seiten CD und DE stehenden Bogen CE festzustellen. Nun ist Bogen DF, das Maß des ∠DAF, gleich dem Bogen BC, dem Maße des ∠BAC, denn beide bilden mit dem nämlichen Bogen FC, dem Maße des ∠ FAC, zusammen einen Halbkreis. (Die Gleichheit der ∠∠ DAF und BAC ist diejenige, welche man Gleichheit der Scheitelwinkel nennt; die der ∠∠ DAF und EDA ist dieselbe, welche als Gleichheit der inneren Wechselwinkel, die rechts und links einer zwei Parallelen schneidenden Linie entstehen, bekannt ist.) Man sieht, daß der Bogen DF = Bogen BE ist, wenn man auf den oberen Theil der Figur den unter dem Durchmesser HG (der zu BF und folglich auch zu DE senkrecht gezogen worden ist) befindlichen gelegt denkt. Die ∠∠ EIG, BAG bleiben rechte und werden also genau die rechten ∠∠ DIG und FAG decken. Ferner wird Punkt E in Punkt D fallen, Punkt B in Punkt F; die beiden Bogen EB, DF haben also dieselben Endpunkte gemeinschaftlich, und dies beweist ein völliges Zusammenfallen bei Bogen ein und desselben Kreises, da dieser aus einer Reihe gleichweit vom Mittelpunkte entfernter Punkte besteht. Der Bogen EB, der dem Bogen DF gleich ist, ist es auch dem Bogen BC, mithin der Bogen EC das Doppelte des Bogens BC. Wir konnten, wie man sieht, den ∠ EDC mittelst des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens messen; wir hatten nur nöthig, die Hälfte dieses Bogens zu nehmen.

Nehmen wir an, daß der Mittelpunkt, anstatt in einem der Schenkel des Winkels zu liegen, sich zwischen beiden befindet, wie bei ∠ EDF in Fig. 6. Die Durchmesser BH und CG, welche den Linien ED und FD parallel laufen, geben uns die gleichen Bogen BC und GH, deren jeder das Maß des gegebenen Winkels ist. Vergleicht man die Bogen EF und BC, so hat EF mehr als BC: 1°. das Stück EB, das dem Bogen DH gleich ist (wegen der Parallelität der

Linien ED und BH); 2°. das Stück CF, das dem Bogen DG gleich ist (wegen des gleichen Grundes). Die Bogen DG und DH zusammengenommen bilden den Bogen GH; folglich ist EF größer als BC um das Stück GH, welches gleich BC ist. Mit andern Worten, EF ist das Doppelte von BC. Um das Maß des ∠ EDF zu haben, genügt es also, die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln befindlichen Bogens zu nehmen.

Nehmen wir endlich an, daß der Mittelpunkt weder in einem der Schenkel, noch zwischen beiden, sondern außerhalb sei, wie es bei ∠ EDF in Fig. 7 ist. Die Durchmesser BH und CG, welche den beiden Schenkeln des Winkels parallel sind, schneiden auf der Peripherie die gleichen Bogen BC, GH ab, so daß jeder das Maß dieses Winkels ist. Das Stück CF des Bogens EF ist dem Bogen GD gleich, insofern diese beiden Bogen zwischen den parallelen Linien DF und CG liegen, und wir bei Fig. 5 gesehen haben, daß zwei parallele Linien ED und BF auf der Kreisperipherie gleiche Bogen DF und BE abschneiden. Es besteht nun der Bogen DG aus Bogen GH (= Bogen BC) und Bogen DH (= Bogen BE) wegen der Parallelität der Linien DE und BH: der Bogen CF ist also = BC + BE. Der Bogen EF, welcher zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels liegt, muß zu dem Werthe von CF den Bogen CE fügen, — also gleich BC + BE + CE sein; und da BE + CE nichts anderes ist als BC, so wird Bogen EF das Doppelte des Bogens BC sein. In diesem Falle, wie in den beiden vorigen Fällen, genügt es also, um das Maß des ∠ EDF zu haben, daß man die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln befindlichen Bogens nehme.

Bis hierher haben wir den Kreis so gewählt, daß er in seinem Innern einen Theil jeder der Schenkel des zu messenden Winkels enthielt; wir wollen ihm jetzt eine solche Stellung geben, daß, — während ein Punkt der Peripherie immer in der Winkelspitze bleiben soll — einer der beiden Schenkel gänzlich außerhalb sich befinde und nur in Einem Punkte den Kreis berühre, nämlich im Scheitelpunkte des Winkels. Dies Verhältniß findet bei ∠ EDF (Fig. 8) Statt. Das Maß dieses Winkels wird ebenfalls die Hälfte des zwischen seinen

Schenkeln liegenden Bogens sein, d. h. die Hälfte des Bogens DBF. Man ziehe den Durchmesser DG durch den Berührungs- und Scheitelpunkt. Dieser Durchmesser wird senkrecht zu DE sein, da sich kein Punkt von ED in dem Kreise befindet, AD der kleinste Abstand dieses Schenkels vom Mittelpunkte ist, und dieser kleinste Abstand eines Punktes von einer Linie, wie wir wissen, zu dieser Linie senkrecht ist. Der ∠ EDG, durch den Durchmesser und den einen Schenkel des gegebenen Winkels gebildet, ist ein Rechter, und hat ein Kreisviertheil als Maß, d. h. die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Halbkreises DBG. Der ∠ GDF hat ebenso als Maß die Hälfte des Bogens GF, der zwischen den Linien DG und DF liegt. Das Maß des gegebenen ∠ EDF, welches die Summe der Maße der beiden vorangehenden EDG und GDF sein muß, wird somit die Hälfte des Bogens DBG plus der Hälfte des Bogens GF, oder die Hälfte des ganzen Bogens. Der ∠ EDF wird also durch die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens gemessen.

Wenn wir in einer andern Weise zu derselben Folgerung kommen wollen, so ziehen wir die Durchmesser BH und IC parallel den Schenkeln des Winkels; sie werden den Bogen BC einschließen, der sein Maß sein wird. Dieser Bogen BC nun ist die Hälfte des Bogens DBF, denn dieser letztere hat mehr als Bogen BC: 1°. das Stück DB, welches ein Viertelskreis, wie Bogen BG, der erste Theil von BC (da die Parallelen DE und BH senkrecht auf dem Durchmesser DG stehen); 2°. das Stück CF, das GC, dem zweiten Theile von BC, gleich ist. Diese zweite Gleichheit folgt aus der Gleichheit von CF und ID (Bogen zwischen Parallelen) mit GC (Maß zweier gleicher Scheitelwinkel); Bogen DBF hat also mehr als Bogen BC den Werth dieses Bogens BC, d. h. er ist das Doppelte davon. Um das Maß des gegebenen Winkels zu haben, genügt es also, die Hälfte des Bogens zu nehmen.

Der ∠ EDF, welchen wir soeben gemessen haben, war größer als ein Rechter. Ist er kleiner (Fig. 9), so wenden wir dennoch ganz dasselbe Verfahren an. Sein Maß würde Bogen BC sein. Der Bogen DF, welcher zwischen seinen Schenkeln liegt, ist, wie wir sehen

werden, das Doppelte von BC. Das Stück DB dieses Bogens DF ist gleich dem Bogen DH, der seinerseits aus dem Bogen IH = BC (Maße von Scheitelwinkeln) und dem Bogen DI = FC (Bogen zwischen Parallelen liegend) besteht. Es ist also DB = BC + CF. Addiren wir hierzu das Stück BF, so erhalten wir Bogen DF = BC + FC + BF; nun ist FC + BF = BC; — also ist der zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Bogen DF das Doppelte des Bogens BC, welcher das Maß dieses Winkels ist.

§ 51. Wir haben nun alle Fälle untersucht, in denen eine unmittelbare Messung eines Winkels möglich ist, indem wir in seinen Scheitel einen Punkt der Kreisperipherie fallen ließen, — und wir haben gesehen, daß in allen diesen Fällen stets die Hälfte des zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels liegenden Bogens das Maß des Winkels ist. Wir wollen nun, weiter gehend, aus den vorhergehenden Grundsätzen die Mittel ableiten, die Winkel unmittelbar zu messen, indem wir ihren Scheitel nicht mehr im Mittelpunkte oder auf der Kreislinie, sondern innerhalb und außerhalb des Kreises annehmen.

§ 52. Zunächst soll uns die Frage beschäftigen, wie wir einen Winkel messen, wenn man den Kreis so legt, daß der Scheitel des Winkels innerhalb des Kreises sich befinde, wie bei ∠ AED (Fig. 10). Man verlängere Seite ED bis zur Peripherie des Kreises, und ziehe durch Punkt C die Linie CF parallel mit EA, die wir ebenfalls bis zur Peripherie verlängert denken. Das Maß des gegebenen Winkels wird die Hälfte des Bogens FD oder die Summe der Hälften jedes seiner Theile sein, d. h. die Hälfte des zwischen den Schenkeln des ∠ AED liegenden Bogens AD, plus der Hälfte des zwischen den Verlängerungen dieser Schenkel gelegenen Bogens CB, welcher gleich dem Bogen FA ist wegen der Parallelität der Linien FC und AB. Man kann also als Maß des ∠ AED unmittelbar die Hälfte der Summe der beiden Bogen nehmen, welche zwischen seinen Schenkeln und zwischen deren Verlängerungen liegen.

§ 53. Messen wir nun den Winkel, dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt. Es können sich alsdann 3 verschiedene Fälle einstellen:

1°. der Kreis schneidet beide Schenkel zugleich;

2°. er schneidet den einen und berührt den andern Schenkel;

3°. er berührt beide Schenkel.

Erster Fall. Die Anordnung zeigt Fig. 11. Man ziehe durch D eine Linie DE parallel mit BC, so wird die Hälfte von AE das Maß des gegebenen Winkels sein. Es ist nun AE gleich dem größten der zwischen den Schenkeln des ∠ ABC liegenden Bogen, nämlich AC, weniger dem Bogen EC oder dem ihm gleichen DF (Parallelität der Linien DE und BC. Folglich können wir als Maß des gegebenen Winkels unmittelbar die Hälfte eines Bogens nehmen, der den Unterschied der beiden zwischen seinen Schenkeln befindlichen Bogen bildet; — oder auch die Hälfte des größeren dieser Bogen, weniger der Hälfte des kleineren von ihnen.

Zweiter Fall. Erläutert durch Fig. 12. Man ziehe AD parallel mit BC, und halte bezüglich der Bogen DF, CD und CA dasselbe Raisonnement, das wir so eben bezüglich der Bogen AE, EC und DF gemacht haben. Wir kommen zu denselben Schlüssen, nämlich, daß man auch in diesem Falle unmittelbar als Maß des gegebenen Winkels die Hälfte der Differenz der zwischen seinen Schenkeln befindlichen Bogen nehmen kann.

Dritter Fall. Siehe Fig. 13. Man ziehe durch B den Durchmesser BD, so wird das Maß des gegebenen Winkels gleich sein der Summe der Maße der Winkeltheile ABD, DBC. Das Maß des ersteren ist nun gleich der Hälfte von AD, weniger der Hälfte von AE; das Maß des zweiten ist gleich der Hälfte von DC, weniger der Hälfte von EC. Das Maß des Winkels ABC wird also die Hälfte von AD sein, plus der Hälfte von DC, oder die Hälfte des Bogens ADC, weniger der Hälfte von AE und weniger der Hälfte von EC, d. h. weniger der Hälfte des Bogens AEC. Der durch zwei Tangenten (Linien, welche nur einen einzigen Punkt mit der Kreisperipherie ge-

mein haben) gebildete Winkel hat als Maß die Hälfte der Differenz der zwischen den Berührungspunkten liegenden Bogen.

§ 54. Fassen wir die verschiedenen Mittel, Winkel zu messen, zusammen, welche wir aus dem ursprünglichen Mittel ableiteten, das darin besteht, einen Kreis auf einen Winkel zu legen, so daß der Kreismittelpunkt auf den Scheitel des Winkels fällt.

1°. Kann man nicht den Mittelpunkt, sondern nur einen Punkt der Kreislinie auf den Scheitel legen, so ist es gleich, ob die beiden Schenkel des Winkels gleichzeitig Sekanten seien oder der Eine Tangente: man nimmt als Maß die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln eingeschlossenen Bogens.

2°. Kann man weder den Mittelpunkt, noch einen Punkt der Kreislinie, sondern nur einen Punkt der Kreisfläche auf den Scheitel des Winkels legen, so nimmt man die Schenkel als verlängert an, und nimmt als Maß des Winkels die Hälfte der Summe der beiden Bogen, welche sie auf der Kreislinie abschneiden.

3°. Kann man endlich weder den Mittelpunkt, noch einen Punkt der Kreislinie, noch selbst einen Punkt innerhalb des Kreises auf den Scheitel des Winkels legen, — kann man aber diesen Kreis so legen, daß die beiden Schenkel des Winkels geschnitten sind, oder der Eine Sekante, und der Andere Tangente, oder alle Beide Tangenten sind, so erhält man ebenfalls unmittelbar das gesuchte Maß des gegebenen Winkels, indem man die Hälfte der Differenz der beiden auf der Kreislinie abgeschnittenen Bogen nimmt.

§ 55. Nach dieser langen Abschweifung über das Messen der Winkel kehren wir zum Parallelogramme zurück, und vergleichen die verschiedenen Neigungen, welche es zeigt.

1°. Die Neigung CBA (in Fig. 14), welche dieselbe ist, wie DAE, ist auch gleich CDA, wegen der zuvor festgestellten Gleichheit der inneren Wechselwinkel. Die Neigung BCD ist, aus demselben Grunde, gleich der Neigung BAD, so daß ein Parallelogramm nur zwei verschiedene Neigungen hat.

2°. Die Summe der Maße dieser Neigungen hat einen bemerkenswerthen Charakter, — sie ist nämlich stets gleich dem Maße zweier rechter Winkel, d. h. gleich einem Halbkreise. Man erkennt diese Eigenschaft sofort, wenn man, zur Darstellung dieser Neigungen die ∠∠ CBA und DAB nimmt, und sieht, daß man dem ∠ CBA den ihm gleichen ∠ DAE substituiren kann. Die Summe der Maße der beiden ∠∠ DAB und DAE, oder das Maß der Summe dieser Winkel, wird ein Halbkreis sein, da der Kreismittelpunkt sich im Punkte A der Linie BE befindet und diese Linie ein Diameter ist, d. h. den Kreis in zwei gleiche Theile zerlegt. Hieraus folgt, daß, wenn man eine der Neigungen eines Parallelogrammes kennt, es leicht ist, die andere zu finden, weil das Maß dieser Letzteren gleich zwei rechten Winkeln sein wird, weniger das Maß der gegebenen Neigung.

Es ist kaum zu bemerken nöthig, daß, da die beiden Neigungen zusammen dasselbe Maß von zwei rechten Winkeln haben, die vier Winkel des Parallelogrammes zusammen dasselbe Maß von vier rechten Winkeln haben müssen.

§ 56. Wenn wir die Diagonale AC ziehen, so theilen wir dadurch die Fläche in zwei Dreiecke BAC und ACD, welche beide dieselbe Basis (BC oder AD) wie das Parallelogramm, und auch dieselbe Höhe, den Abstand der beiden Parallelen BC und AD, haben (als Basis eines Dreiecks nimmt man irgend eine seiner Seiten; seine Höhe ist der Abstand der gegenüberliegenden Winkelspitze von dieser Basis). Da diese beiden Flächen Gleichheit in den Längen ihrer theilweisen Gränzen, und in den Neigungen dieser Gränzen oder Seiten haben (AC ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, BC ist gleich AD, und ihre Neigungen zu AC sind wegen der Gleichheit der innern Wechselwinkel dieselben), so sind dieselben congruent; eine jede von ihnen hat folglich als Maß die Hälfte von dem Maße des Parallelogrammes, d. h. die Hälfte des Produktes der Grundlinie mal der Höhe, oder auch, die Hälfte der Grundlinie mal der Höhe, oder endlich, die Hälfte der Höhe mal der Grundlinie. Dies also ist das Maß

der Dreiecksfläche, aus jenem der parallelogrammischen Fläche abgeleitet.

§ 57. Die Beziehungen der drei Neigungen des Dreiecks zu den beiden Neigungen des Parallelogrammes von der gleichen Grundlinie und der gleichen Höhe sind sehr bemerkenswerth: auf beiden Seiten ist die Summe der Maße dieselbe. CBA und BAD sind die beiden Neigungen des Parallelogrammes: CBA, BAC und ACB sind die drei Neigungen des Dreiecks. Es hat nun ACB dasselbe Maß wie CAD (als innere Wechselwinkel), und die Summe der Maße von BAC und CAD ist gleich dem Maße von BAD. Die drei Winkel eines Dreiecks haben also, zusammengenommen, das gleiche Maß, wie zwei rechte Winkel; — es folgt hieraus, daß, wenn man zwei dieser Winkel kennt, man leicht das Maß des dritten Winkels erhalten kann: es wird nämlich das Maß zweier rechter Winkel sein, weniger das Maß eines jeden der beiden bekannten.

§ 58. Im Parallelogramme findet keine verknüpfende Beziehung zwischen Winkeln und Seiten Statt; — anders ist dies bei dem Dreiecke: mit einem Winkel ändert sich sofort die gegenüberliegende Seite, mit ihm wächst sie, mit ihm wird sie kleiner. Will man sich über diese innige Beziehung vergewissern, so sehe man die Seiten BC und BA als die Schenkel eines Zirkels an und AC als einen von einer Zirkelspitze zur andern gespannten Faden; es leuchtet ein, daß man, um den Winkel (die Oeffnung) des Zirkels zu vergrößern, dem Faden eine größere Länge geben müsse. Aus dieser gegenseitigen Abhängigkeit folgt, daß zur Construction eines Dreiecks es nicht nöthig ist, alle Theile desselben zu kennen; es bedarf nicht der Kenntniß von sechs gegebenen Stücken (drei Seiten und drei Winkeln), um die Fläche eines Dreiecks vollkommen zu bestimmen. — Zur Bestimmung genügen z. B. drei Seiten vollkommen. Die zuvor angewendete Betrachtung, zwei der gegebenen Seiten, z. B. BC und BA, als die Schenkel eines Zirkels anzusehen, und die dritte Seite AC als den Abstand der beiden Spitzen, zeigt, daß drei Längen nur zu einem

einzigen Dreiecke führen können, und daß es in der That nur eine einzige Zirkelöffnung gibt, bei welcher die Spitzen sich in einer gegebenen Entfernung von einander befinden.

Wenn man, in einem zweiten Falle, nun statt einer der Seiten, z. B. AC, den gegenüberliegenden ∠ ABC zu den bestimmenden Daten treten läßt, so werden dieselben auch dann noch hinreichen, d. h. es wird nur Ein Dreieck sich aus ihnen bestimmen lassen. Der Unterschied zwischen diesem und dem vorhergehenden Falle besteht darin, daß statt des Abstandes der Zirkelspitzen man hier den Winkel der Schenkelöffnung hat; einer jeden Oeffnung des Zirkels entspricht aber, wie wir wissen, eine bestimmte Entfernung einer Spitze von der andern.

Wir sehen, daß, wenn der gegebene Winkel nicht der Seite, welche man fortließ, gegenüber läge, die Sache nicht mehr dieselbe sein würde. Die gegebenen Stücke könnten dann mehreren Dreiecken genügen, wie man sich leicht überzeugen kann. Nehmen wir an, daß, während die Seiten BA und BC gegeben waren, nicht mehr der ∠ ABC (Fig. 15) mit ihnen gegeben sei, sondern der ∠ BAC. Um den Abstand der beiden Spitzen unseres supponirten Zirkels darzustellen, sehen wir BC als die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite an; eine der Spitzen ist in B, die andere muß in einem Punkte der unbestimmten Linie AC liegen, und von dem Punkte B um die Länge BC entfernt sein. Gemeinhin werden aber zwei Punkte diese Bedingung erfüllen, der eine C liegt rechts, der andere C′ links des einzigen Punktes D, welcher der Endpunkt von BD, dem Minimal-Abstande des Punktes B von der Linie AC, oder der von Punkt B auf AC gefällten Senkrechten ist. In dem besonderen Falle, wo BC dem Minimal-Abstande gleich sein würde, würden die gegebenen Stücke nur einem einzigen Dreiecke entsprechen; das Dreieck würde alsdann aber einen rechten Winkel haben und also in ihm, als einem r e c h t w i n k e l i g e n, jeder seiner drei Winkel implicite bekannt sein, — der erste, weil er ein Rechter ist, der zweite als ein gegebener, und der dritte, weil die Summe der Maße der drei Winkel das Maß von zwei Rechten bildet. Sein Maß erhielte man, indem man von dem

Maße eines rechten Winkels das des gegebenen subtrahirte. — Wäre die Entfernung BC kleiner, als der Minimal-Abstand, so würde natürlicher Weise gar kein Dreieck möglich sein.

Wenn wir nun, in einem dritten Falle, eine der übrig bleibenden Seiten AB durch den ihr gegenüber liegenden ∠ ACB ersetzen, so daß uns nur Seite BC mit den beiden ihr anliegenden Winkeln bleibt, also mit ihren Neigungen gegen die beiden andern Seiten, so bleibt zu untersuchen, ob diese gegebenen Stücke mehr als ein Dreieck zulassen. Es gibt aber nicht zwei verschiedene Linien, welche, in Punkt B die BC treffend, ein und denselben ∠ ABC bilden könnten. Es gibt eben so wenig zwei verschiedene Linien, welche diese Linie BC in C treffend, einen und denselben ∠ ACB bilden könnten. Die oben genannten Daten führen also zur Construction nur eines einzigen Dreiecks.

Da die Kenntniß zweier Winkel eines Dreiecks die des dritten mit sich führt, so ist es nicht nöthig, daß die beiden gegebenen Winkel der gegebenen Seite anliegen.

Wenn wir nun schließlich statt der übrig gebliebenen Seite den dritten Winkel nehmen, so haben wir nur die drei Neigungen der Seiten gegen einander. Man sieht sogleich, daß eine unendliche Menge von Dreiecken dieselben drei Neigungen haben könne; — die Gleichheit der Neigung hängt nur von der Parallelität der Linien ab, nur mit Parallelen lassen sich unzählig viel Dreiecke bilden.

Fassen wir jetzt noch einmal das Gesagte zusammen! Es ist nur ein einziges Dreieck möglich, wenn zu seiner Construction gegeben sind:

1°. die drei Seiten;

2°. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel;

3°. eine einzige Seite und zwei Winkel.

Mit drei gegebenen Winkeln dagegen kann man unendlich viel Dreiecke construiren.

Um also ein Dreieck zu construiren, bedarf man dreier Daten, eine Seite mit darin einbegriffen. Diese Beschränkung kann man, strenge genommen, fortlassen, da eigentlich mit den drei Winkeln

nur zwei Stücke gegeben sind, insofern die Kenntniß des dritten Winkels in der Kenntniß der beiden andern mit eingeschlossen ist.

§ 59. Gleichheit der Dreiecke. Wir kommen auf den Gegenstand unserer Untersuchung zurück. — Als Ausdruck für das Maß des Dreiecks fanden wir die Hälfte des Produktes seiner Grundlinie mal seiner Höhe. Daraus folgt, daß alle Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe haben, gleich sind, d. h. eine Gleichheit des Flächeninhalts haben. Dieser Schluß fand für die Parallelogramme ebenfalls seine Anwendung.

§ 60. Trapeze und Trapezoïde. Man bezeichnet mit dem Gattungsnamen Polygone (Vielseite, Vielecke) alle durch gerade Linien begränzte Flächen. Wir haben das vierseitige Polygon schon untersucht, welches je zwei und zwei parallele Seiten hat; — es können nun aber diese vierseitigen Polygone, die Vierecke, noch die besondern Fälle bieten:

1°. den Fall, wo nur zwei Seiten parallel sind (wobei die Figur ein Trapez genannt wird);

2°. den Fall, wo gar keine Parallelität besteht (Trapezoïd).

§ 61. Inhalt des Trapezes. Erster Fall. Zerlegt man das Trapez ABCD (in Fig. 16) durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke, so hat das eine DC, das andere AB als Basis; die Höhe ist für beide Dreiecke dieselbe, nämlich der Abstand der Parallelen AB und CD, den wir mit h bezeichnen wollen. Das Maß des Dreiecks ABD ist $=\frac{1}{2}h\,.\,AB$; das des Dreiecks DBC ist $=\frac{1}{2}h\,.\,CD$; das Maß des Trapezes muß demnach die Summe dieser beiden Maße sein, nämlich:

$$=\frac{1}{2}h\,.\,AB+\frac{1}{2}h\,.\,CD=\frac{1}{2}h\,.\,(AB+CD).$$

Dies wird in Worten so ausgedrückt: das Maß eines Trapezes ist gleich dem Produkte der Hälfte seiner Höhe (Abstand der parallelen Seiten von einander) mal der Summe dieser Seiten.

§ 62. Inhalt des Trapezoïds. Zweiter Fall. Das Vierseit ABCD (Fig. 17), welches gar keine Parallelität zeigt, zerlegt sich in zwei Dreiecke ABC, BDC, die man getrennt messen muß, indem man irgend welche ihrer Seiten als Grundlinien annimmt. Die Summe der Maße dieser Flächentheile wird das Maß der gesammten Fläche bilden.

§ 63. Vielecke. Wir haben noch alle die durch eine Reihe von geraden Linien über die Zahl 4 hinaus umschriebenen Flächen zu messen. Diese Polygone oder Vielecke heißen im Besonderen Pentagone, Hexagone, Heptagone, Octogone u. s. w., je nachdem sie fünf, sechs, sieben, acht Winkel oder Seiten ꝛc. haben. Die in Fig. 18 angegebene Zerlegung in Dreiecke erlaubt in allen Fällen, sie stückweise zu messen, wie wir es mit dem Vierecke gethan haben; es ist hierbei nichts Besonderes, das uns in der Fortsetzung unserer Betrachtungen aufhalten könnte, zu erinnern.

§ 64. Vom Kreise. Nach Abhandlung aller Flächen mit geradlinigten Gränzen kommen wir zu denen mit krummlinigter Begränzung. Die erste, welche uns entgegentritt, weil sie die einfachste ist, ist der Kreis, dessen Gränze die Peripherie oder Kreislinie (Umfang) ist. Um sein Maß aus den vorhergehenden ableiten zu können, muß man zunächst sich nach einer Analogie umsehen, welche zwischen ihm und den vorher betrachteten Flächen besteht. Diese Analogie nun hat man in folgender Weise aufgefunden. Die geraden Linien sind die ersten, welche man messen konnte; um die krummen Linien mit ihnen vergleichen zu können, mußte man dieselben als Reihen geradlinigter Elemente ansehen, die gegen einander geneigt sind, d. h. jede Curve als eine Polygonallinie von unendlich kleinen Stücken. — Nach Festsetzung dieser Annahme bleibt zu untersuchen, in welche besondere Klasse von Polygonen man den Kreis setzen müsse. Das Charakteristische dieser Klasse ist leicht zu finden; Ein Kennzeichen wird das sein, daß eine besondere Zerlegung in

Dreiecke möglich sei, welche uns für das Maß einen sehr einfachen Ausdruck gebe.

Man ziehe innerhalb eines Kreises (Fig. 19) eine Anzahl gleicher Linien, deren je zwei mit ihren Endpunkten in der Peripherie zusammenstoßen; — mit andern Worten: man ziehe eine Reihe gleicher Sehnen. Hat man deren gemeinschaftliche Länge schicklich gewählt, so daß der Endpunkt der letzten Sehne mit dem Anfangspunkte der ersten Sehne zusammenfällt, so erhält man innerhalb des Kreises eine durch gerade Linien begränzte Fläche, also ein Polygon, dessen sämmtliche Winkelspitzen gleichweit vom Mittelpunkte des Kreises entfernt sein müssen, da sie alle Punkte eines und desselben Kreises sind. Der Kreis ist nun eine Figur derselben Gattung, wie dieses Polygon; er weicht nur insofern von ihm ab, als seine geradlinigten Elemente kleiner und also in bei Weitem größerer Zahl vorhanden sind. Aber wenn das Maß, welches wir für das Polygon finden wollen, unabhängig von der Zahl und der Größe seiner Seiten ist, d. h. wenn das Verfahren, welches wir zu seiner Messung anwenden, auch noch anwendbar bleibt, wie groß auch die Zahl der Seiten und ihre Größe sei, so ist es klar, daß dasselbe Verfahren allen Polygonen derselben Klasse entsprechen wird, und darum auch dem Kreise. Wir wollen nun also das Polygon messen. Durch Verbindung des Mittelpunktes mit allen verschiedenen Winkelspitzen der Figur wird diese in eben so viel gleiche Dreiecke B O A, A O H ꝛc. zerlegt, als sie Seiten hat. Diese Dreiecke zeigen, wenn man sie mit einander vergleicht, eine Gleichheit ihrer Begränzungen. Nennen wir H die Höhe eines der Dreiecke, indem Punkt O als gemeinsamer Scheitelpunkt aller Dreiecke gilt, so ist diese Höhe dieselbe für sie alle. Ebenso können alle Grundlinien, wegen ihrer gleichen Länge, durch dasselbe Zeichen C ausgedrückt werden, und es hat also jedes Dreieck als Maß $\frac{1}{2}$ H . C, die ganze achtseitige Figur hat also ($\frac{1}{2}$ H . C . 8) als Maß ihres Inhalts. Schreibt man diesen Ausdruck, indem man die beiden Faktoren C und 8 in (8 C) zusammenfaßt, so ist 8 C die unter dem Namen des Perimeter bekannte Summe aller Seiten,

die man durch das einzige Zeichen P zu bezeichnen pflegt. Der Inhalt des Polygons ist also $= \frac{1}{2}$ H.P, d. h. gleich dem Perimeter mal der Hälfte des Abstandes einer Seite vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises.

Der Ausdruck Perimeter ist von der Zahl und der Länge der Seiten unabhängig; das von uns angewendete Verfahren ist dies also ebenfalls und muß uns folglich zum Maße des Kreises führen, welches sein wird:

> das Produkt seines Perimeters (oder der Peripherie) mal der Hälfte des Abstandes eines der geradlinigten Elemente des Umfangs vom Kreismittelpunkte, d. h. mal der Hälfte des Radius. Ist C der Kreisumfang, R der Radius, so ist das Maß für den Inhalt des Kreises $= \frac{1}{2}$ R. C.

Es würde sehr schwierig, wenigstens sehr lang sein, wenn man den Umfang jedes Kreises messen wollte. Man wendet dazu den so eben gefundenen Ausdruck nicht an. Die Beziehung, welche zwischen den beiden Elementen dieses Maßes besteht (Radius und Peripherie können sich nur gleichzeitig, in bestimmtem Verhältnisse zu einander, ändern), und sich bei den vorhergehenden Messungen nicht findet, hat die Auswerthung des Kreisumfanges, ausgedrückt durch den Radius, möglich gemacht, d. h. man hat für die Peripherie ein Vielfaches des Radius substituiren können. Wir werden später sehen, in welcher Weise diese Substitution Statt gehabt hat, und welche, allein gebräuchliche, Form dem Ausdrucke für den Inhalt des Kreises gegeben worden ist.

§ 65. Kreissector. Der zwischen einem Bogen der Peripherie, GFE zum Beispiel, und den Radien GO und EO liegende Theil der Kreisfläche heißt ein Kreisausschnitt oder Kreissector. Die Summe der Grundlinien der von uns vorausgesetzten partiellen Dreiecke wird in diesem Falle der Bogen, den wir mit a bezeichnen, sein, — das Maß des Sectors also $= \frac{1}{2}$ R . a.

§ 66. Kreissegment. Die zwischen dem Bogen GFE und der Sehne GE liegende Fläche heißt ein Kreisabschnitt oder Kreissegment. Sein Inhalt ergibt sich aus der Subtraktion des Dreiecks EOG von dem Sector.

Ist die Sehne ein Durchmesser, so ist das Segment zugleich Sector.

Ist das Segment größer, als der Halbkreis, z. B. die Fläche zwischen Sehne EG und Bogen EDCBAHG, so muß man, um den Inhalt dieses Segments zu finden, dem zu dem Bogen gehörigen Sector den Inhalt des Dreiecks EOG hinzufügen.

§ 67. Reguläre Polygone. Wir gehen noch einen Augenblick zu der Klasse von Polygonen zurück, die einen Mittelpunkt haben, und regelmäßige (reguläre) Polygone genannt werden. Indem wir von der Zerlegung derselben in Dreiecke redeten, setzten wir den Mittelpunkt als bekannt voraus; es ist noch zu ergänzen, wie man diesen Mittelpunkt findet, wenn er nicht gegeben ist, und von den verschiedenen Kennzeichen zu reden, an denen man die Regelmäßigkeit eines Polygons dann noch erkennt, wenn kein umschriebener Kreis da ist.

Eine der Eigenschaften, welche die regulären Vielecke kennzeichnen, ist die von uns schon besprochene, gleiche Seiten zu haben. Welchem Gesetze sind aber die verschiedenen Neigungen dieser Seiten unterworfen? Sie alle sind einander gleich; — sie alle sind eingeschriebene (d. h. dem Kreise eingeschriebene) Winkel, die durch gleiche Sehnen gebildet sind. Diese gleichen Sehnen nun, z. B. AH und GH (Fig. 19), sind über gleiche Bogen gespannt, weil, wenn man die Radien OA, OH, OG zieht, welche an den Endpunkten der Sehnen aufhören, man zwei Dreiecke OAH, OHG erhält, die wegen der Gleichheit aller drei Seiten congruent sind, und die Gleichheit der Centriwinkel AOH, GOH, denen die in Rede stehenden Bogen als ihre Maße zugehören, motiviren. Aus der Gleichheit dieser Bogen folgt die Congruenz der Segmente, in welchen die verschiedenen Winkel des Polygons eingeschrieben sind, und daraus

die Gleichheit der Maße aller Winkel. Die beiden, die regulären Polygone von allen andern Polygonen unterscheidenden Kennzeichen sind also die Gleichheit aller Seiten und die Gleichheit aller Winkel.

Wie findet man den Mittelpunkt eines regulären Polygons? — Wäre dieser bekannt, so könnte man die Figur in Dreiecke zerlegen, denen er als gemeinsamer Scheitel diente, und deren Höhen die von diesem Scheitel auf die verschiedenen Seiten des Polygons gefällten Senkrechten wären. Diese Senkrechten nun halbiren die Seiten; denn da die Linien, welche von den Endpunkten der Seiten nach dem Mittelpunkte gehen, gleich sind, so ist kein Grund, daß der Fußpunkt des auf die Seite gefällten Perpendikels sich deren einem Endpunkte mehr nähern sollte, als dem andern. Diese Perpendikel würden übrigens jedes Dreieck in zwei andere congruente Dreiecke zerlegen, da zwei Seiten und ein Winkel des einen den entsprechenden Stücken des andern gleich sind. — Wenn aber die vom Mittelpunkte auf eine Seite gefällte Senkrechte diese Seite halbirt, so muß umgekehrt der im Mittelpunkte einer zweiten Seite errichtete Perpendikel, ebenso wie der erste Perpendikel, durch den Mittelpunkt gehen. Dieser muß nämlich der Durchschnittspunkt beider Perpendikel sein. —

Um also den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, hat man nur nöthig, auf der Mitte zweier Sehnen Senkrechte zu errichten, und zwei Sehnen sind bekannt und gegeben, sobald man drei Punkte hat. Durch drei solcher Punkte, wenn sie nicht etwa in ein und derselben geraden Linie liegen, kann man also einen Kreis führen. (Lägen die drei Punkte in Einer geraden Linie, so würden die in den Halbirungspunkten der Sehnen errichteten Senkrechten parallel werden, und mithin kein Durchschnitt dieser Linien, also kein Kreismittelpunkt und kein Kreis möglich sein.)

§ 68. Construction senkrechter Linien. Wir haben von dem Errichten, resp. dem Fällen der Perpendikel gesprochen; die betreffende Construction geschieht, wie folgt:

Soll im Punkte A der Linie DE (Fig. 20) eine Senkrechte

errichtet werden, so nehme man rechts und links von A die gleichen Stücke AB und AC, beschreibe von B und von C aus, als Mittelpunkten, mit derselben Zirkelöffnung Kreisbogen, welche sich in einem Punkte F schneiden, verbinde F mit A, so ist AF die verlangte Senkrechte, da die beiden Nebenwinkel FAB und FAC (wegen der durch Gleichheit aller drei Seiten begründeten Congruenz der Dreiecke AFB und AFC) gleich sind, folglich rechte Winkel sein müssen.

Will man nun aber, zweitens, eine Senkrechte fällen von dem Punkte A auf die Linie DE (Fig. 21), so muß man von diesem Punkte, als Mittelpunkt, aus einen Bogen BGC beschreiben, welcher die Linie DE in den Punkten B und C schneidet, die nun als Mittelpunkte dienen, um von ihnen aus mit derselben Zirkelöffnung zwei neue Bogen zu beschreiben, die sich in F schneiden. Die Linie AF ist dann die verlangte Senkrechte. Sie ist es deshalb, weil die in der Mitte von BC errichtete Senkrechte, wenn wir diese Mitte als bekannt annähmen, einerseits den Punkt A treffen würde, als den Mittelpunkt eines Kreises, in welchem BC eine Sehne ist, und andererseits den Punkt F, welcher denselben Bedingungen entspricht, wie der gleich benannte Punkt F in Fig. 20.

Soll, endlich, in dem Halbirungspunkte der gegebenen Linie AB (Fig. 22) die Senkrechte errichtet werden, so beschreibe man, von den beiden Endpunkten A und B aus, als Mittelpunkte, mit ein und derselben Zirkelöffnung, zwei große Bogen, welche sich oberhalb AB im Punkte C, und unterhalb AB im Punkte D schneiden. Diese beiden Durchschnittspunkte müssen sich in der Senkrechten befinden, welche AB in zwei gleiche Theile theilt; denn sie stehen zum Halbirungspunkte von AB ganz in derselben Beziehung, wie der Punkt F in Fig. 20 zum Punkte A steht; d. h. der in diesem Halbirungspunkte (wenn derselbe bekannt wäre) errichtete Perpendikel müßte nothwendiger Weise durch die Punkte C und D hindurch gehen; — woraus wir folgern, daß die diese beiden Punkte verbindende Linie durch den Halbirungspunkt von AB geht. — Dieses Verfahrens bedient man sich, um eine Linie zu halbiren.

§ 69. Rückblick. Wir haben nach demselben Maßstabe alle geradlinigten Flächen gemessen, die unter dem Gattungsnamen der Polygone begriffen sind. Wir sahen zuerst, daß ein beliebiges Dreieck als Maß die Hälfte desjenigen Produktes hat, dessen beide Faktoren die Zahl, welche die Höhe ausdrückt, und die Zahl, welche die Grundlinie ausdrückt, sind; d. h. das Dreieck faßt so viele Flächeneinheiten in sich, als in der Hälfte jenes Produktes abstrakte Einheiten enthalten sind. Zur Abkürzung bedient sich die Geometrie einer Ausdrucksweise, welche nach den vorangegangenen Erläuterungen Niemanden überraschen kann: „eine Fläche, heißt es, ist das Resultat der Multiplikation zweier Längen," oder auch, „eine Fläche ist gleich dem Produkte zweier Linien." Buchstäblich genommen, würden diese Ausdrücke keinen Sinn haben.

Wir haben, zweitens, gesehen, daß ein Vierseit, mit je zwei parallelen Seiten, oder ein beliebiges Parallelogramm, das Produkt seiner Grundlinie mal seiner Höhe als Maß hat.

Drittens sahen wir, daß ein unregelmäßiges Polygon, d. h. ein solches, welches nicht zu gleicher Zeit Gleichheit der Winkel und der Seiten zeigt, nach seiner Zerlegung in Dreiecke, leicht gemessen werden kann.

Endlich ward bemerkt, daß die Theilung auf eine besondere Weise bewirkt wird, wenn das Polygon regelmäßig ist, — und es hat uns dies zur Messung des Kreises und seiner verschiedenen Theile geführt.

§ 70. Bestimmungen des Volums der Körper. Die Proportionen, welche dazu gedient haben, die Flächen zu vergleichen, werden nun dazu dienen, die räumlichen Inhalte (die Capacitäten) mit einander zu vergleichen. Ein Beispiel wird dies besser darthun, als eine peinlich ausgearbeitete Erklärung. —

Ein Gefäß enthält 18 Litres Flüssigkeit; nehmen wir an, daß der Inhalt aller möglichen Gefäße sich auf das Litre als Einheit bezieht, oder sich in Litres auswerthen läßt, so heißt die abstrakte Zahl 18 die Capacität des Gefäßes, sein räumlicher oder cubi-

scher Inhalt. Das Wort Capacität wird im gewöhnlichen Gebrauche nur angewendet, wenn von einem Orte oder Raume die Rede ist, der von festen Wänden eingeschlossen wird; wir wollen ihm eine weitere Ausdehnung geben, indem wir eine Hypothese machen, die nichts an den durch die verschiedenen Körper eingenommenen Räumen ändert, und also füglich zugelassen werden kann, so lange nur von diesen Räumen die Rede ist.

Denken wir in jedem Körper die Gestalt wie ein imaginäres Gefäß ohne Dicke, mit undurchdringlichen Wänden, d. h. denken wir uns, daß das Vermögen, durch welches ein Körper dem Verdrängen von seinem Platze durch einen andern Körper widersteht, ganz und gar an seiner Oberfläche seinen Sitz habe, so daß wir aus diesem Vermögen eine eingebildete Umhüllung machen könnten, welche einige Wirklichkeit hätte und die Dinge in dem Zustande erhielte, in dem sie sich befinden; — die Schlußfolgerungen, welche nur auf den eingenommenen Raum sich beziehen, werden augenscheinlich in diesem hypothetischen Zustande dieselben sein, wie in dem wahren Zustande, da die Wirkung, nämlich das Einnehmen des Raumes, dieselbe bleibt, welche Ursache man auch annehme. In den physikalischen Wissenschaften sind Hypothesen der Art, wie wir sie machen, von großem Nutzen; die Kunst des Analysten besteht darin, unter allen möglichen Ursachen der Wirkung, mit der er beschäftigt ist, die schicklichste, oft die einzige schickliche, zu wählen, die er der wahren Ursache, welche es auch sei, substituiren könne. In allen solchen Suppositionen geht die Phantasie weiter, als sie gehen sollte; oder vielmehr, durch den Geist, der beständig ihrer Bilder bedarf, befragt, und außer Stande, ihm den Gegenstand seiner Raisonnements, der nicht in ihr Gebiet gehört, zu geben, gibt sie ihm den materiellen Gegenstand, welcher die Abstraktion, die er gemacht hat, erzeugte. Beschäftigt sich der Geist mit einer Gränze, so verlangt er von der Einbildungskraft den begränzten Körper; will er die Gestalt, so führt die Phantasie ihm den damit bekleideten Körper vor; denkt er für diese Gestalt eine selbstständige Existenz, eine Existenz an und für sich, so malt die Phantasie ihm eine entsprechende Umhüllung, aus materiellen

dünnen Blättchen (wenn man so sagen darf) bestehend, welche sie soviel als möglich dünner und dünner werden läßt. Von diesen Betrachtungen über die Beziehungen zwischen Geist und Phantasie kehren wir zu unserm Gegenstande zurück. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß wir alle möglichen Körper (feste, flüssige und luftförmige) so ansehen können, als ob sie ihren Platz im Raume vermöge einer besonderen undurchdringlichen Umhüllung einnehmen, oder, wenn man will, daß wir den Raum als in Zellen von jeder Form und jeder Größe durch eingebildete Wände getrennt denken, welche die verschiedenen Mengen von Materie oder die Körper in ihren bezüglichen Stellungen erhalten. Jede Zelle wird, im gewöhnlichen Sprachgebrauche, die Gestalt eines Körpers. Dieser Zerlegung des Raumes in unregelmäßige Zellen, deren Wände alle denkbaren Krümmungen haben können, werden wir als ein Mittel zur Vergleichung eine neue Zerlegung in Zellen hinzufügen, die alle gleich sind, und deren Capacität durch die Einheit ausgedrückt wird; jede der ursprünglichen, ersten, Zellen wird alsdann als Maß die Zahl der neuen, secundären, Zellen haben (Einheiten der Capacität), welche sie in sich schließt. Mehrere dieser besonderen Maße werden durch die Proportionen gegeben werden.

§ 71. Würfel, Cubus. Die einfachsten Oberflächen sind die ebenen. Die einfachste Form ist die eines Spiel-Würfels; sie zeigt sechs ganz gleich große quadratische Seitenflächen, die einen senkrecht zu den anderen. Sie bietet also nur Wiederholungen ein und derselben Fläche und ein und derselben Neigung, der einfachsten aller Flächen und der einfachsten aller Neigungen, wie wir sahen. Diese Form heißt die cubische; der von ihr bekleidete Körper heißt ein Cubus oder Würfel, und zählt zur Klasse der Polyeder. Diese letztere Bezeichnung drückt die Vereinigung mehrerer ebenen Gränzflächen aus, die kürzer mit dem Namen Ebenen bezeichnet werden.

Als Einheit der Capacität, oder des räumlichen Inhalts, wählen wir den Cubus, dessen jede Seite die Oberflächen-Einheit ist. Die

Bildung dieser cubischen Zelle nun, welche als Vergleichungsglied dienen soll, läßt sich folgendermaßen betrachten.

§ 72. Wir nehmen an, daß die Ebene ABFE (Fig. 23), ein Quadrat, mit der Seite EF auf einem ebenen Tische ruhe, zu der sie senkrecht stehe, d. h. gegen welche sie nicht mehr nach rechts, als nach links sich neige. Sie sei von einer Flüssigkeit umgeben, welche ihr gestatte, sich zu bewegen, ohne indeß den Raum zwischen den neuen Stellungen, welche die Ebene nach einander annehmen wird, und der ersten Stellung, selbst einnehmen zu können. Wir nehmen weiter an, daß diese Ebene sich mit einer für alle ihre Theile gleichen Geschwindigkeit bewege, so daß der Gang des einen in keiner Weise auf den Gang des andern einwirken könne, und daß alle, wie isolirt, sich fortbewegen. Ferner setzen wir voraus, daß die Punkte E und F sich von ihrer ersten Stellung entfernen, indem sie die Linien EH und FO senkrecht zur Linie EF beschreiben; wir denken die Bewegung beendet, wenn FG = EF sein wird. Wenn nun der sich gebildet habende leere Raum wirklich die cubische Form hat, so ist:

1°. EFGH ein dem gegebenen Quadrate gleiches, weil seine vier Seiten = EF, und die ∠∠ HEF und EFG Rechte sind;

2°. die Linie AB hat, bezüglich ihrer ersten Stellung, sich durchaus so verhalten müssen, wie EF bezüglich der ihrigen: der zwischen den Linien AB und CD eingeschlossene Raum ist also ein Quadrat, das = EFGH ist;

3°. es ist kein Grund, daß in seiner Fortbewegung die Ebene sich gegen den Tisch vorwärts oder rückwärts geneigt habe; die Linien AE und BF bleiben während ihrer Bewegung also senkrecht zum Tische, und folglich auch zu den Linien, welche ihre Fußpunkte auf ihm beschreiben; — die beiden Seitenflächen BFGC und AEHD sind also ebenfalls Quadrate, die dem gegebenen gleich sind. — Die Gleichheit aller Neigungen läßt sich leicht aus der Gleichheit der Seitenflächen ableiten; die Seiten ABFE und DCGH waren zwei nach einander eingenommene Stellungen ein und derselben Ebene, welche mit einer in allen ihren Theilen gleichen Geschwindigkeit sich fortbe-

wegt; sie sind gleichmäßig nach rechts hin gegen die untere Seite geneigt, und da diese Neigungen nach rechts rechte Winkel sind, so sind die zur Linken ihnen gleich.

Dieselbe Art der Schlüsse wendet man auf alle Paare gegenüberliegender Seitenflächen an, da die Einen die Wiederholungen der Anderen sind. Wir können also folgern, daß alle Neigungen rechte Winkel sind; der leere Raum also, den wir im Innern der Flüssigkeit gebildet annehmen, hat eine cubische Form, — und wenn die bestimmende Ebene ABFE, die Erzeugungsebene, die durch ihre Bewegung, diesen hohlen Raum erzeugt hat, die Flächen-Einheit ist, so wird die Capacität dieses hohlen Raumes die Einheit der Capacität, des räumlichen Inhalts sein.

§ 73. Räumliche Winkel. Vor der Vergleichung der verschiedenen Capacitäten mit der Einheit des räumlichen Inhalts müssen wir noch einige sehr gebräuchliche Ausdrücke erklären. —

Die Neigung einer Ebene gegen eine andere heißt ein diedrischer Winkel, d. h. ein durch zwei Seitenflächen gebildeter; die diesen beiden Ebenen gemeinsame Gränze heißt die Kante.

Das Zusammentreffen dreier Kanten, oder, wenn man will, das Zusammentreffen von drei ebenen Winkeln (ein ebener Winkel ist nichts anderes, als die Neigung einer Linie gegen eine andere), bildet einen sogenannten körperlichen Winkel, eine körperliche Ecke. Diese Bezeichnung ist aber nicht buchstäblich zu nehmen; sie würde ohne Sinn sein, da ein Winkel eine Neigung ist, und sich keine körperliche Neigung denken läßt. In allen derartigen Ausdrücken muß man, wie wir schon bemerkten, nur denjenigen Sinn sehen, welchen der damit verbindet, welcher sie gebraucht.

Um die verschiedenen diedrischen Winkel zu vergleichen, gehen wir auf die Neigungen von Linien zurück, die wir bereits mit einander vergleichen können. Indem man auf jeder Ebene, von demselben Punkte der Kante aus, eine Linie zieht, welche in Bezug auf diese Kante eine feste Neigung hat, so bleiben nur die durch diese Linien gebildeten Hülfswinkel mit einander zu vergleichen. Es versteht

sich hierbei, daß die feste Neigung, von der so eben die Rede war, beständig auf ein und derselben Seite der Kante liegen muß; entweder immer zur Rechten des Punktes, der sie theilt, oder immer zur Linken. Da außerdem diese Neigung eine willkürliche ist, so hat man die allereinfachste, nämlich den rechten Winkel, gewählt und hat in dieser Wahl den Vortheil gefunden, nicht mit derjenigen Seite der Kante zu thun zu haben, gegen welche man die auf jeder Ebene gezogene Linie neigen muß. Die diedrischen Winkel werden alsdann gemessen mittelst des Winkels zweier Linien, die man in einem und demselben Punkte der Kante, auf jeder der beiden Ebenen, gezogen hat.

Den Abstand zweier parallelen Ebenen erhält man, wenn man diese Ebenen durch eine senkrecht zu jeder derselben stehende Ebene schneidet, und dann einen Perpendikel von einem der Durchschnittspunkte zu dem andern zieht. Wir wollen uns nicht dabei aufhalten, darzuthun, daß diese senkrechte Ebene die kleinste Fläche ist, welche man zwischen den zwei gegebenen Ebenen haben kann, und daß folglich der Minimal-Abstand der beiden Durchschnittspunkte auch der Minimal-Abstand der Ebenen ist. Es genügt zu bemerken, daß die Abstände vergleichbar sind, und es immer sein werden, wenn man, um sie zu erhalten, beständig dasselbe Verfahren anwendet.

§ 74. Räumliche Maße. Wir kehren zu unserem Gegenstande zurück. Erlauben wir der Ebene DCGH (Fig. 23) ihre Bewegung fortzusetzen, wenn sie in der Folge von FG eine neue Linie von gleicher Länge zurückgelegt hat, so hat die Ebene zwei gleiche cubische Zellen hinter sich zurückgelassen; — hat sie eine dreimal so große Länge als FG zurückgelegt, so wird sie einen leeren Raum von drei Zellen erzeugt haben, und so fort. Es findet mithin eine proportionale Aenderung zwischen der von der beweglichen Ebene durchlaufenen Entfernung, d. i. der Länge der Kante FG, und der Zahl der cubischen Zellen Statt. Wenn wir nun die Länge von FG durch a bezeichnen, so bezeichnet dieser Ausdruck zugleich die Capacität der in Fig. 24 dargestellten großen Zelle.

Lassen wir nun die Ebene CGHD stehen bleiben und die Ebene

BFGC sich bewegen. Hat sie eine neue Entfernung gleich GH oder gleich der Längeneinheit durchlaufen, d. h. wird sie in der Entfernung 2 von der ihr gegenüber liegenden Ebene sein, so ist die Capacität der Figur 2a; wird sie in der Entfernung 3 sein, so ist sie 3a und so fort. In der Entfernung b wird sie b.a sein, d. h. die Zahl der Zellen (Fig. 25) wird der Zahl der Flächeneinheiten der Basis gleich sein. —

Uebertragen wir endlich die Beweglichkeit auf die obere Ebene. Hat diese die doppelte Entfernung von DH durchlaufen, so wird die Capacität eine doppelte geworden sein; sie wird durch 2b.a dargestellt werden. Hat sie zwischen sich und der gegenüber liegenden Ebene eine dreifache Entfernung, so wird die Capacität dreifach oder 3b.a sein u. s. w. Endlich, bei der Entfernung c, wird die Capacität b.a.c. sein.

Die Capacität, oder das Volumen oder der körperliche Inhalt (diese drei Ausdrücke kann man beliebig anwenden) eines rechtwinkligen Parallelepipedum (so heißt die Fig. 26, welche aus sechs rechteckigen Ebenen besteht, deren je zwei einander gleich, und die alle zu einander senkrecht sind) wird also durch das Produkt der Zahlen ausgedrückt, welche die Längen der Kanten bezeichnen, oder, kürzer gesagt, durch das Produkt seiner drei Dimensionen, der Breite FG, der Tiefe FE, der Höhe FB, — oder auch, durch das Produkt der Grundfläche EFGH mal der Höhe FB. Der Cubus, dessen drei Dimensionen gleich sind, wird durch die dritte Potenz der Zahl ausgedrückt, welche die gemeinschaftliche Länge seiner Kanten bezeichnet; ist diese Länge a, so ist der Inhalt des Cubus a.a.a oder a^3. Eine Kante kann den Namen Dimension nur dann erhalten, wenn sie der kleinste Abstand zwischen den beiden parallelen Ebenen ist.

§ 75. Bei'm Aufsuchen des Maßes für das Rechteck kamen wir zu einem Ausdrucke, der nichts auf die Neigungen Bezügliches enthielt, nämlich zu dem Produkte von Grundlinie und Höhe. Die Vergleichung aller anderen Flächen mit dem Rechtecke zeigte, daß, wäh-

rend man dabei dieselben Veränderlichen, Basis und Höhe, betrachtet, die Neigungen der Messung gänzlich fremd bleiben. Bei dem Aufsuchen der körperlichen Inhalte finden wir, durch denjenigen, welcher in der Reihe der Körper dem Rechtecke entspricht, ein Maß, das dem der rechteckigen Fläche analog ist, d. h. das Produkt aus Basis und Höhe, und von diesem Maße bleiben ebenfalls die Neigungen ausgeschlossen. — Wir können also, durch Analogie, schließen, daß — wenn wir soviel als thunlich die Basis und Höhe als Veränderliche bei den Körpern ansehen, ihre Maße, von welcher Gestalt sie auch sein mögen, nur diese beiden Veränderlichen haben, die Neigungen dabei aber gänzlich fremd sein werden. Ein zweiter Schluß, den wir daraus werden ziehen können, ist, daß alle Körper derselben Art, welche Gleichheit der Grundfläche und Gleichheit der Höhe zeigen, dasselbe Maß des Inhalts haben werden, d. h. sie werden dieselbe Zahl von Raumeinheiten in sich schließen; —. die Körper heißen alsdann gleich. Mittelst der vorangehenden Betrachtungen kann man aus dem Maße des Parallelepipedum das der andern Körper ableiten.

§ 76. Besondere Körper. Warum hat nun das Parallelepipedum das Produkt aus seiner Basis und seiner Höhe als Maß? Weil es aus der Bewegung des in allen seinen Punkten mit gleicher Geschwindigkeit sich fortbewegenden Parallelogramms hervorgeht. — Diese Eigenschaft würde nicht ausschließlich dem Parallelogramme angehören; sie hängt nur von der Ausdehnung der beweglichen Ebene ab, oder von der Zahl Flächeneinheiten, welche sie bietet, keineswegs von ihrer Gestalt. Jede Fläche, welche sich in derselben Art bewegt, wird also einen Körper erzeugen, dessen Maß das Produkt dieser Fläche mal dem kleinsten Abstande zwischen der anfänglichen und der letzten Stellung sein wird. Bewegt sich ein Dreieck, so wird es als Körper ein sogenanntes dreiseitiges Prisma (Fig. 28) erzeugen, dessen Seitenflächen Parallelogramme sind, so wie die Seitenflächen des durch die Bewegung eines Rechtecks oder eines Parallelogramms entstandenen Körpers es waren. Ganz dasselbe ist es mit den Wänden eines Körpers, der durch irgend welches Polygon erzeugt ist.

Dieser Körper, mit dem Gattungsnamen des Prisma, erhält alsdann als besondere Bezeichnung noch die Art des Polygons, welches ihn hervorbringt. Die Bewegung eines Kreises erzeugt einen geraden Cylinder (Fig. 29).

§ 77. Prisma und Pyramide. Zerlegen wir das in Fig. 28 dargestellte Prisma. Eine durch die Kante DF und die Spitze B gehende Ebene wird von diesem Prisma einen Körper abschneiden, welcher durch vier dreieckige Seiten begränzt wird und den Namen einer dreieckigen Pyramide trägt. Eine andere durch die Diagonale DC und dieselbe Spitze B gehende Ebene wird den übrig bleibenden Theil in zwei neue dreieckige Pyramiden zerlegen. Diese drei Pyramiden, deren Summe das ganze Prisma bildet, wollen wir durch die Buchstaben bezeichnen, die an ihren vier Winkelspitzen stehen. Sie haben gleiche Basis und gleiche Höhe.

Die Pyramide BDEF (wir nennen die Buchstaben, welche die Basis bezeichnen, zuletzt), welche zuerst abgeschnitten wurde, hat DEF als Basis, und als Höhe den kleinsten Abstand der parallelen und gleichen Seiten ABC und DEF. (Als Basis einer Pyramide nimmt man diejenige Seite, die man will; alsdann ist aber die Höhe der kleinste Abstand dieser Seite von derjenigen der vier Winkelspitzen, welche nicht in der Grundfläche liegen.)

Zweitens, hat die Pyramide DBCA zur Grundfläche ABC, welches Dreieck gleich DEF ist, und als Höhe dieselbe kleinste Entfernung, von der so eben die Rede war. Betrachten wir ferner diese zweite Pyramide unter einem neuen Gesichtspunkte, indem wir ADC als seine Basis, folglich B als seinen Scheitel ansehen, und vergleichen wir mit ihr die dritte Pyramide, deren Scheitel wir in denselben Punkt B legen wollen, wodurch Seite CDF Basis wird. Zunächst bemerken wir eine Congruenz der beiden Grundflächen; es sind die beiden Hälften des Parallelogramms ADFC. Die Gleichheit der Höhen ist augenscheinlich, da die Scheitel der beiden Pyramiden in demselben Punkte B liegen. Wir folgern daraus, daß die dritte Pyramide dasselbe Maß habe, wie die zweite, welche dasselbe Maß wie

die erste hat. Jede derselben hat also als Körperinhalt den dritten Theil des körperlichen Inhalts vom Prisma. Bemerken wir nun, daß die erste Pyramide dieselbe Basis DEF und dieselbe Höhe wie das Prisma hat, daß das Maß des Prisma gleich ist seiner Basis b mal seiner Höhe h, so kommen wir zu dem endlichen Schlusse, daß das Maß einer dreieckigen Pyramide gleich dem Dritttheile des Produktes seiner Basis mal der Höhe ist, nämlich $= \frac{1}{3} b \,.\, h$.

§ 78. Pyramide. Haben wir statt eines Dreiecks ein Polygon als Basis der Pyramide (Fig. 30), so können wir sie in ebensoviel dreieckige Pyramiden zerlegt denken, als man partielle Dreiecke auf der Basis formiren kann. Alle diese Pyramiden, mit dem Punkte S als gemeinsamem Scheitel, haben dieselbe Höhe h; das Maß einer jeden wird $\frac{1}{3}$ h mal seiner Basis sein: die Summe der Maße oder das Maß der gegebenen Pyramide wird folglich $\frac{1}{3}$ h mal der Summe der Grundflächen, oder mal der polygonalen Basis, sein. Das Maß einer beliebigen Pyramide ist also, wie das der dreiseitigen Pyramide $= \frac{1}{3} h \,.\, b$.

§ 79. Kegel. Da die Zahl der Seiten der Basis nicht auf die Form des Maßes einer Pyramide Einfluß übt, so folgt, daß diese Form noch dieselbe bleiben wird, wenn die Basis ein Kreis oder Polygon von unendlich vielen Seiten wird. Die Figur heißt alsdann ein Kegel (conus). Als Maß hat derselbe das Dritttheil des Produktes aus seiner Basis und seiner Höhe.

§ 80. Kugel. Die Zerlegung in Pyramiden wird die Messung aller Polyeder, d. h. aller Körper mit ebenen Seitenflächen, erleichtern.

Die Kugel kann als ein Polyeder mit unendlich kleinen Seitenflächen, die alle vom Mittelpunkte um eine dem Radius gleiche Ent-

fernung abstehen, betrachtet werden: man kann die Kugel als aus unendlich vielen Pyramiden zusammengesetzt ansehen, denen der Mittelpunkt als gemeinsamer Scheitel dient, und welche ihre kleinen Seitenflächen als Basis haben. Das Maß einer dieser Pyramiden würde man wegen der Kleinheit ihrer Basis nicht leicht erhalten; die Summe ihrer Maße aber bildet sich sehr einfach: sie ist nichts anderes als die Summe der Basen (die ganze Oberfläche der Kugel), multiplicirt mit dem Dritttheile der gemeinsamen Höhe (dem Radius der Kugel). Der Körperinhalt der Kugel ist also das Produkt ihrer Oberfläche mit dem Radius $= \frac{1}{3} S . r.$

Wir werden später auf die verschiedenen Maße zurückkommen, welche wir hier durchgegangen sind. Wir werden dann den Ausdruck für die Kugeloberfläche, die wir vorläufig mit S bezeichnen, finden. Jetzt gehen wir zu andern Anwendungen über.

Fortsetzung der Anwendungen der Proportionen.

§ 81. Geometrische Construction von Proportionen. Aehnlichkeit der Dreiecke. Wir wollen uns jetzt mit dem Mittel beschäftigen, den Augen die Lösungen algebraischer Fragen, welche von Proportionalitäten handeln, durch Zeichnung und Construction von Linien anschaulich zu machen.

Bei der Entstehung des Rechtecks haben wir bemerkt, daß die verschiedenen Stellungen der vorderen Kante eines Lineals, das man mit einer für alle Punkte gleichmäßigen Geschwindigkeit sich bewegen läßt, parallele Linien sind, d. h. in ihrer ganzen Länge gleich weit von einander abstehen, und ferner eine Gleichheit der Neigung gegen jede sie schneidende Linie zeigen. Wenn nun das Lineal auf den beiden von Punkt A aus (Fig. 31) divergirenden Linien AB, AC vorrückt, so werden die drei Winkel der verschiedenen Dreiecke ADE, AFG u. s. w., durch jede seiner Stellungen bestimmt, beständig dieselben bleiben. Diese Dreiecke, welche in allen ihren Neigungen

Gleichheit zeigen, heißen ähnliche Dreiecke; ihre Seiten haben eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft. Von der Spitze des gegebenen Winkels ausgehend, wird das Lineal, welches mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit sich bewegt, in dem ersten Augenblicke auf der Linie AB einen Weg von gewisser Länge, etwa den Weg a, durchlaufen; während des zweiten Augenblickes wird es aufs Neue denselben Weg durchlaufen; es wird während des dritten Augenblickes noch eine Länge a durchlaufen u. s. w. Dasselbe wird Statt finden in Bezug auf die Linie AC; der einzige Unterschied wird in der Länge des während eines Augenblickes zurückgelegten Weges bestehen, der im Allgemeinen nicht mehr gleich a sein wird, sondern etwa b. Haben wir die Linie DE am Ende des siebenten Augenblickes gezogen, so wird die Länge AD durch 7 . a, die Länge AE durch 7 . b ausgedrückt werden; — ist die Linie FG die Stellung der vorderen Kante unsers Lineals am Ende von 12 Augenblicken, so wird die Seite AF die Länge 12 . a, und die Seite AG wird 12 . b haben. Das Verhältniß der beiden durchlaufenen Längen auf Linie AB wird sein $\frac{7 . a}{12 . a}$, oder $\frac{7}{12}$; das Verhältniß der durchlaufenen Wege auf der Linie AC wird $\frac{7 . b}{12 . b}$, oder $\frac{7}{12}$, d. h. dasselbe Verhältniß wie das vorhergehende, sein. Endlich können wir hinzufügen, daß die beiden Linien DE und FG, von denen wir noch nicht gesprochen haben, dasselbe Verhältniß ein drittes Mal zeigen. Die Identität der beiden ersten Verhältnisse hängt von der Parallelität der Linien DE und FG ab. Bringen wir nun das Dreieck ADE in die durch Fig. 32 angezeigte Stellung, d. h. so, daß ∠ AED den gleichen ∠ AGF deckt; so wird die Linie AD, indem sie die Stellung A′D einnimmt, der Linie AF, auf welche sie zuerst gelegt worden war, parallel sein, insofern der ∠ EAD, wenn er die Stellung G′AD einnimmt, nicht aufgehört hat, dem ∠ GAF gleich zu sein: diese Seite A′D befindet sich also, bezüglich der Seite AF, in denselben Verhältnissen, wie zuvor die Seite DE sich bezüglich der Seite FG befand. Dies führt uns zu dem Schlusse, daß DG (zuvor DE) mit FG in demselben Verhältnisse

steht, wie A′G (zuvor AE) mit AG, d. h. in dem Verhältnisse von $\frac{7}{12}$. Wir können füglich also den allgemeinen Schluß ziehen, daß in den ähnlichen Dreiecken immer Proportionalität zwischen den homologen Seiten besteht, d. h. zwischen den, den gleichen Winkeln gegenüber liegenden, Seiten.

Es ist unnöthig, hinzuzufügen, daß, indem man homologe Seiten als die Grundlinien ansieht, die Höhen zweier ähnlichen Dreiecke in demselben Verhältnisse stehen, wie diese Grundlinien, und folglich in demselben Verhältnisse, wie die anderen Paare homologer Seiten; es wird, um sich davon zu überzeugen, hinreichen, daß man vom Punkte A (Fig. 31) eine Linie AI senkrecht zu den beiden Seiten DE und FG ziehe. Diese Linie, deren Theile AH und AI die Höhen der Dreiecke sind, ist augenscheinlich in demselben Falle, wie die Linien AB und AC.

§ 82. Diese Eigenschaft, die wir so eben bei den ähnlichen Dreiecken kennen gelernt haben, erlaubt uns, ohne Rechnung, und durch einfache Combinirung von Linien zur Auflösung von Aufgaben zu kommen, welche nur Größen mit proportionellen Veränderungen enthalten. Bei jeder Frage handelt es sich darum, ein Maß zu finden, und jedes Maß ist ein von der Natur der gemessenen Größen unabhängiges Zahlenverhältniß. Sind drei Zahlenverhältnisse gegeben, so ist das die Proportion vervollständigende vierte Glied dadurch völlig bestimmt. Es ist stets dasselbe, welches auch die Natur der Gegenstände sei, um die es sich handelt, und diese Natur scheint den abstrakten Einheiten nur einen Namen zu geben. Man sieht sofort, daß eine derartige Unabhängigkeit uns erlaubt, den vierten Theil einer Proportion mittelst solcher Größen zu suchen, die wir dazu geeignet finden.

Die Proportionalität nun zwischen den Seiten ähnlicher Dreiecke gibt ein Mittel, eine Länge zu finden, welche mit drei anderen Längen in Proportion steht, deren Zahlenverhältnisse beliebig gewählt werden können. [Wenn, in der That, die drei Längen AD,

AF, AE so liegen, wie sie Fig. 31 zeigt, so genügt es, um die Länge AG, das vierte Glied der Proportion, zu finden, daß man Punkt D und Punkt E durch eine Linie verbinde, und durch F die Linie FG parallel mit DE führe.] — Ein an diese Länge gelegter Maßstab gibt sodann leicht ihr Zahlenverhältniß zur Einheit. — Durch dies geometrische Verfahren entdeckt man also ein Zahlenglied, welches durch ein Gesetz der Proportionalität mit drei andern schon bekannten Zahlengliedern verbunden ist. Es ist das demnach auch ein Mittel, zur Lösung solcher Aufgaben zu kommen, welche Proportionalitäten enthalten, weil diese Lösung sich, in letzter Zergliederung, immer auf das Auffinden eines Zahlenverhältnisses zurückführt. Die Rechnung findet sich hierbei durch die Anordnung der Linien vertreten; — man darf nur das Resultat lesen.

Wir wollen einige Beispiele geben.

§ 83. Beispiele. — Erstes Beispiel. Drei Arbeiter haben 5 Meter einer bestimmten Arbeit gemacht; man will wissen, wie viel derselben Arbeit sieben Arbeiter machen werden. Wir ziehen zwei unbegränzte Linien AF, AG (Fig. 33), die beliebig gegen einander geneigt sind; auf der ersten bezeichnen wir einen Punkt B in der Entfernung von 3 Längeneinheiten vom Punkte A, dann einen Punkt D in der Entfernung von 7 Einheiten; — auf der zweiten bezeichnen wir einen Punkt C in der Entfernung von 5 Einheiten von demselben Punkte A, verbinden die Punkte B und C, ziehen durch D eine Linie DE parallel mit BC, — so bleibt mittelst eines Maßstabes zu untersuchen, wie viel Einheiten die Länge AE enthält. Die gefundene Zahl ist die der Meter Arbeit, welche durch 7 Arbeiter gemacht worden ist.

§ 84. Zeichnung von Parallelen. Die Art, eine Linie zu einer andern parallel zu ziehen, ist folgende:

Man lege an die Linie BC Eine Seite des rechten Winkels von einem Winkelmaße, und lege gegen die andere Seite ein Lineal, das man festhält, während man an ihm das Winkelmaß so weit entlang

schiebt, bis diejenige Seite, welche an der Linie BC lag, durch den Punkt D geht; — dann ziehe man die Linie DE, so ist sie die Parallele zu BC, weil beide Linien gleichmäßig gegen die vordere Kante des Lineals geneigt sind.

Man kann in dieser Weise so viel Parallelen, als man will, nach einander ziehen, und benutzt dies Verfahren, um eine gegebene Linie in eine solche Anzahl gleicher Theile zu theilen, als verlangt ist. Haben wir nämlich die Länge AB (Fig. 35) in acht gleiche Theile zu zerlegen, so ziehe man durch den Punkt A eine unbegränzte Linie AC unter einem beliebigen Winkel zu AB, und trage auf dieser Linie in einer beliebigen Entfernung von A eine Länge 1 auf, — dann in derselben Entfernung von dieser ersten Theilung ein zweites Stück 2, dann ein drittes, und so fort bis zum achten, 8. Darauf verbinde man Punkt 8 mit Punkt B durch eine Linie, an welche man Winkelmaß und Lineal so anlegt, wie es in Fig. 33 mit der Linie BC geschah. Indem man das Lineal festhält, schiebt man das Winkelmaß gegen die Punkte 7, 6, 5, 4 ꝛc. und zieht jedesmal von diesen Punkten aus Parallelen zur Ausgangslinie B8, oder bezeichnet wenigstens die Punkte, wo diese Parallelen die Linie AB treffen würden. Auf diese Weise erhalten wir sieben Punkte, welche die Linie AB in acht gleiche Theile zerlegt, wie man leicht erkennt, sobald man die Proportionalitäten liest, welche sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, die von den Parallelen nach und nach gebildet worden sind, ergibt: $Aa : AB = 1 : 8$, d. h. diese Linie Aa ist der achte Theil von AB. Ferner $Aa : Ab = 1 : 2$, d. h. Aa ist die Hälfte von Ab, also $ab = Aa$, u. s. w.

§ 85. Man kann, um eine Linie parallel zu einer andern zu ziehen, eine Eigenschaft der parallelen Linien dazu benutzen, nämlich die, daß sie mit einer dieselben durchschneidenden Linie gleiche innere Wechselwinkel bildet (§ 50). Man verbinde (Fig. 33) die Punkte C und D, und messe den $\angle$ BCD mittelst des Transporteurs (Winkelmessers). Dies geschieht, indem man dessen Mittelpunkt auf Punkt C, den Nullpunkt der Gradtheilung auf die Linie CB legt, und die

Anzahl der Grade des Bogens zählt, welche zwischen den Seiten CB und CD sich befinden. Dann bestimmt man mit Hülfe desselben Instruments die Lage, welche die Linie DE haben muß, damit ∠ CDE dem ∠ BCD gleich werde. Zu diesem Ende lege man den Mittelpunkt des Transporteurs auf Punkt D, den Nullpunkt der Gradtheilung auf die Linie CD, und bezeichne durch einen Punkt das andere Ende des Bogens, den man gemessen hat. Es bleibt dann nur die Linie DE zu ziehen, die durch diesen Punkt und den Punkt D geht.*)

§ 86. Zweites Beispiel. Drei Arbeiter haben vier Stunden zu einer bestimmten Arbeit gebraucht; wie viel Zeit würden fünf Arbeiter dazu nöthig gehabt haben?

Wir wissen, daß hier die Proportionalität eine umgekehrte ist, und wir den Ausdruck

$$3:5 = x:4$$

darzustellen haben.

Man ziehe zwei divergirende Linien (Fig. 36), bezeichne auf der ersten einen Punkt B in der Entfernung 3 von A, und einen Punkt C in der Entfernung 5; — dann bezeichne man auf der zweiten den Punkt D in der Entfernung 4 von demselben Punkte A, verbinde C mit D, und ziehe durch B eine Linie BE parallel mit CD. Das Zahlenverhältniß von AE zur Längeneinheit ist die gesuchte Zahl. Man sieht, daß, wenn in der gegebenen Frage die Proportionalität eine direkte gewesen wäre, wir, statt die Linie CD zu ziehen, den Punkt B mit Punkt D verbunden, und durch C eine Parallele zu BD geführt haben würden.

Statt nun in den vorhergehenden Beispielen eine gleiche Zahl Einheiten von verschiedenen Gattungen auf jeder der beiden Linien

*) Es ist einfacher, blos des Handzirkels sich zu bedienen, wenn es sich nur um eine Parallele zu einer gegebenen Linie AB handelt (Fig. 34). Es sei D der Punkt, durch welchen man die verlangte Parallele ziehen will; man nehme die Senkrechte DF in den Zirkel, und beschreibe, mit DF als Radius, von irgend einem Punkte G in der Linie AB, den unbegränzten Bogen acb; lege dann das Lineal so an, daß es zugleich Tangente an den Bogen acb wird, und ziehe die Linie DE, so ist sie eine Parallele zu AB.

zu sehen, welche von demselben Punkte divergiren (eine gewisse Anzahl Einheiten a auf der einen, und dieselbe Anzahl Einheiten b auf der andern Linie), — warum sieht man statt dessen verschiedene Zahlen von Einheiten derselben Gattung? Weil, da man beliebig die Richtung derselben Station unsers beweglichen Lineals wählen konnte, wir sie so wählen, daß die Zahl Einheiten b, durch die zweite Linie gegeben, einer anderen bestimmten Zahl von Einheiten a gleich sei, so daß uns nur ein einziges Glied der Vergleichung, eine einzige Art von Einheiten, bleibt.

§ 87. Vierte Proportionalen. Eine einzige Parallele hat uns so eben zur Entdeckung der vierten Proportionalen geführt. (Die Lösung einer Frage, welche eine der Gleichungen

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{x}{c}$$

gibt, heißt Aufsuchen einer vierten Proportionale.) Zwei Parallelen werden uns eben dahin führen, wie folgt.

Wir haben den Werth von x, welcher der Gleichung $a:b = c:x$ entspricht, zu finden. Wir ziehen die Linie BE (Fig. 37), deren erster Theil $BC = b$, und deren zweiter Theil $CE = a$ sei. Von Punkt C ziehen wir die unbegränzte Linie CF unter einem beliebigen Winkel zu BE, und nehmen von C aus auf dieser Linie die Länge $CD = c$. Wir verbinden dann D mit E, ziehen durch B die Linie BA parallel CD, und durch C die Linie CA parallel ED. Das Dreieck ABC, das man in dieser Weise erhält, ist dem Dreiecke DCE ähnlich, da die Parallelität der Linien AB und CD die Gleichheit der $\angle\angle$ ABC, DCE bedingt, und ferner die Parallelität von AC und DE die Gleichheit der $\angle\angle$ ACB, DEC, und endlich aus der Gleichheit dieser vier ersten Winkel (je 2 und 2) die Gleichheit der beiden letzten nothwendig folgt. Wir erhalten deshalb die Proportion

$$CE:BC = CD:BA, \text{ oder}$$
$$a:b = c:BA,$$

und wir finden hierdurch die gesuchte vierte Proportionale.

§ 88. Weil ∠ BAC dem ∠ CDE gleich ist, können wir folgern, daß zwei Winkel gleich sind, sobald ihre Oeffnung in demselben Sinne gerichtet ist, und die Schenkel parallel sind. Daraus folgt die Möglichkeit, dieselbe Frage nochmals zu lösen, indem man annimmt, daß das große Dreieck dem kleinen so vereint sei, wie es Fig. 38 zeigt, d. h. indem man dies große Dreieck auf den Verlängerungen von BE und AD construirt annimmt, welche Construction nach dem bisher Gesagten die Aehnlichkeit zur Folge hat.

§ 89. Nach den Parallelen sind die Perpendikel die am leichtesten zu zeichnenden Linien; man kann, mittelst dreier auf den Seiten eines gegebenen Dreiecks errichteten Perpendikel ein Dreieck erhalten, welches ihm ähnlich sei, ebenso wie wir eines mittelst dreier Parallelen erhalten haben. Es wird dies ein anderes Verfahren, zu demselben Zwecke zu kommen, ergeben.

Die Aehnlichkeit zweier Dreiecke, deren homologe Seiten zu einander Perpendikel bilden, ist leicht einzusehen. Nimmt man an, daß die Linie ab (Fig. 39) senkrecht auf Seite AB stehe, die Linie ac senkrecht auf Seite AC, so sieht man, daß ∠ cab, den diese beiden Linien bilden, dem ∠ CAB gleich ist. Beide Winkel drücken in der That aus, was dem ∠ MaF an zwei Rechten fehlt, insofern nämlich ∠ DFa ein Rechter ist, und die Summe der Maße aller drei Winkel jedes Dreiecks ein Halbkreis ist (§ 57); andrerseits ist das Maß des ∠ BDE (gleich dem ∠ aDF, seinem Scheitelwinkel) mit dem Maße des ∠ BAC zusammen auch ein Viertelkreis. Der ∠ BAC hat also dasselbe Maß, wie ∠ DaF, also wie ∠ cab. Hat man endlich die Linie cb senkrecht auf BC gezogen, so hat man dadurch zwei neue ∠∠ acb und cba gebildet, deren einer, acb, wie wir sehen werden, gleich dem ∠ ACB ist, auf dessen Schenkeln die seinigen senkrecht stehen. Das Maß für die vier Winkel eines Vierseits ist nämlich die Summe der Maße der sechs Winkel der beiden Dreiecke, aus denen das Vierseit besteht, also ein ganzer Kreis. Der ∠ acb kann als zum Vierseit cGBD gehörig angesehen werden, so daß sein Maß mit dem des ∠ MCG zusammen einen Halbkreis (zwei Rechte) geben wird,

insofern die ∠∠ cMC und cGC, welche beide Rechte sind, im Ganzen auch einen Halbkreis als Maß haben. Andererseits gibt das Maß des ∠ ACB, mit ∠ MDB zusammen, auch einen Halbkreis: es hat somit der ∠ acb dasselbe Maß, wie der ∠ ACB. Es genügt uns, die Gleichheit zweier Paare homologer Winkel dargethan zu haben, um auf die Aehnlichkeit zu schließen, von der wir geredet haben. Wir würden uns sogar haben darauf beschränken können, die Gleichheit zweier Winkel, deren Schenkel zu einander senkrecht stehen, zu beweisen.

§ 90. Wir haben gesehen, wie aus der Combinirung gerader Linien die Aehnlichkeit der Dreiecke entstand, und dadurch sich die Möglichkeit ergab, sie zur Lösung algebraischer Gleichungen anzuwenden. Wir werden sie in gleicher Weise aus der Vergleichung der geraden mit den Kreis-Linien (den einfachsten gekrümmten Linien) sich entwickeln sehen.

Haben wir die Proportion

$$a : b = c : x,$$

so ziehen wir eine Linie CD (Fig. 40), deren Stück CE das Glied b und das Stück ED das Glied c darstellen. Von E ziehen wir eine gegen CD beliebig geneigte Linie EB, deren Länge das Glied a der Proportion darstellt, verbinden B mit D und errichten in den Halbirungspunkten von CD, wie von BD Senkrechte. Um den Durchschnittspunkt dieser beiden Perpendikel beschreiben wir eine Kreislinie so, daß sie durch Punkt D geht, also auch durch die Punkte B und C (nach § 67). Diese Kreislinie durchschneidet die verlängerte Linie EB im Punkte A, und bestimmt dadurch die Länge AE, welche, wie wir sehen werden, das x der Proportion darstellt.

Verbindet man nämlich C mit A, so entstehen die beiden ähnlichen Dreiecke BED und CEA, deren Aehnlichkeit sehr leicht zu beweisen ist. Denn

1°. sind die ∠∠ BED und CEA als Scheitelwinkel einander gleich (§ 50);

2°. sind die ∠∠ ABD und ACD einander gleich, weil sie den-

selben Bogen zwischen ihren Schenkeln fassen, und zugleich Peripheriewinkel auf diesem Bogen sind;

3°. die ∠∠ CAB, CDB sind aus demselben Grunde gleich.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt die Proportion:

$$EB : CE = ED : EA.$$

Will man von dem hier besprochenen Verfahren eine Anwendung machen, so wird man nicht genau denselben Gang Statt finden lassen, sondern den folgenden: man wird zunächst einen Kreis beschreiben, dessen Durchmesser größer sein muß als die Summe der beiden mittleren Glieder der Proportion, sonst aber beliebig sein kann. Aus irgend einem Punkte der Kreislinie, z. B. aus C, beschreibt man dann mit der Summe der mittleren Glieder (b + c) einen Bogen, der die Peripherie im Punkte D schneidet; um den Punkt E, mit dem äußersten bekannten Gliede der Proportion als Radius, beschreibt man einen zweiten Bogen, der die Peripherie im Punkte B schneidet. Zieht man nun die Linie BE, so ist die Verlängerung AE das unbekannte äußere Glied der Proportion.

§ 91. Da in dieser Construction die beiden mittleren Glieder einer Proportion durch die beiden Stücke ein und derselben Sehne dargestellt sind, so sieht man leicht, daß, wenn die Sehne, welche die beiden äußeren Glieder darstellt, ein D u r c h m e s s e r ist, diejenige Sehne, welche die beiden mittleren Glieder in dem Falle, wo diese beiden gleich sind, darstellen soll, zu der ersten Sehne (dem Durchmesser) senkrecht stehen muß (§ 67). Hieraus ergibt sich das einfache Mittel, eine Größe, welche die m i t t l e r e P r o p o r t i o n a l e zwischen zwei bekannten Größen ausdrücken soll, durch Zeichnung darzustellen: man beschreibt einen Kreis, der die Summe der äußeren Glieder CE + ED (Fig. 41) oder (a + b) zum Durchmesser hat; dann errichtet man im Punkte E einen Perpendikel, welcher die Kreislinie im Punkte B schneidet, — so ist die Länge BE die gesuchte mittlere Proportionale.

§ 92. Das rechtwinkelige Dreieck. Die Linien CB und DB, welche die Punkte C und D mit dem Punkte B verbinden, bilden einen rechten ∠ CBD, der in einen Halbkreis eingeschrieben ist, oder einen Halbkreis zwischen seinen Schenkeln faßt. Deshalb also theilt der von der Spitze des rechten Winkels in einem rechtwinkeligen Dreiecke CBD auf die Hypotenuse CD (die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite) gefällte Perpendikel diese Hypotenuse in zwei Theile, zwischen denen sie die mittlere Proportionale bildet.

§ 93. Dieser Perpendikel BE theilt außerdem das Dreieck CBD in zwei kleinere rechtwinkelige Dreiecke BEC, BED, welche alle beide ihm ähnlich sind, weil nämlich außer dem rechten Winkel, der in allen drei Dreiecken sich befindet, jedes kleinere Dreieck noch mit dem großen, eins den ∠ BCE, das andere den ∠ BDE, gemein hat. Aus diesen Aehnlichkeiten folgen die beiden Proportionen

$$CE : CB = CB : CD,$$
$$ED : DB = DB : CD.$$

Sie zeigen, daß jede der Sehnen CB und DB mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem Stücke desselben ist, das zwischen seinem Endpunkte C oder D und dem Fußpunkte des Perpendikels, E, liegt. Die erste Proportion, umgeformt, ergibt

$$\overline{CB^2} = CD . CE \text{ (§ 26).}$$

Es ist aber nun $\overline{CB^2}$ das Maß des über der Länge CB construirten Quadrats, und (CD . CE) das Maß eines Rechtecks, dessen Grundlinie CE, und dessen Höhe CD ist; — es sind also zwei gleiche Flächenräume.

Die Umformung der zweiten Proportion ergibt

$$\overline{DB^2} = CD . ED,$$

was die Gleichheit des Quadrats über der Seite DB, und des Rechteckes mit der Grundlinie ED und der Höhe CD ausdrückt. Die Maße der beiden vorhergehenden Rechtecke zeigen das Bemerkenswerthe, daß ihre Summe das Maß des Quadrats ergibt, welches man über dem Durchmesser construiren würde. Denn

$$CD . CE + CD . ED \text{ ist}$$
$$= CD . (CE + ED) = CD . CD = \overline{CD}^2.$$

Die Summen der Maße der ersten Quadrate, $\overline{CB}^2 + \overline{DB}^2$ ist also gleich $\overline{CD}^2$, was die Gleichheit zwischen der Summe zweier quadratischen Flächen, die auf den Schenkeln des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks errichtet sind, mit der quadratischen Fläche, welche über der Hypotenuse errichtet wird, darthut. Man drückt diesen Satz, den sogenannten pythagoräischen Lehrsatz oder schlechtweg den Pythagoras, folgendermaßen aus:

Im rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten (d. ist der den rechten Winkel einschließenden Seiten).

§ 94. Sekanten und Tangenten. Die Sekanten (über die Kreislinie hinaus verlängerte Sehnen des Kreises) und die Tangenten können ebenso wie die Sehnen dazu dienen, die vierten proportionalen Glieder oder die mittleren Glieder zu erhalten. Soll der Unbekannte x der Proportion

$$a : b = c : x$$

gefunden werden, so beschreibt man einen Kreis, dessen Durchmesser größer sein muß, als jedes der mittleren Glieder b und c; dann, mit einem Radius, der gleich b weniger c ist (vorausgesetzt, daß b das größte mittlere Glied ist), zieht man um A als Mittelpunkt (Fig. 42) einen Kreisbogen, der die Peripherie im Punkte D schneidet, und führt durch die Punkte A und D eine Linie, welche die ganze Länge von b Einheiten hat. Vom Endpunkte B dieser Sekante als Mittelpunkt, mit einem Radius von a Längeneinheiten, beschreibt man dann einen Bogen, der die Peripherie im Punkte C schneidet, — verbindet die Punkte B und C durch eine Linie, welche die Peripherie im Punkte E durchschneidet, so wird deren Stück BE die gesuchte Zahl darstellen.

Es sind nämlich die beiden Dreiecke BAE und BCD ähnlich, weil ihnen der $\angle ABC$ gemeinsam ist, und der $\angle BAE$ des einen

gleich dem $\angle$ BCD des andern Dreiecks ist. Letztere Gleichheit folgt, weil, wenn man zu BAE den $\angle$ DAE addirt, und mit BCD und DCE = DAE das Gleiche thut, man ein und dasselbe Resultat erhält, nämlich zwei Rechte. Aus dieser Aehnlichkeit nun folgt die Proportionalität der homologen Seiten, d. h.

$$BC : BA = BD : BE, \text{ oder}$$
$$a : b = c : BE.$$
$$a : b = c : x.$$

Ist der Unbekannte mittlere Proportionale, wie in der Proportion

$$a : x = x : b$$

der Fall ist, so ist die darstellende Construction desselben folgende:

In dem Kreise um E als Mittelpunkt (Fig. 43) ziehe man zunächst die Sekante CDB, die in ihrer ganzen Länge a Einheiten enthält, und b Einheiten in ihrem äußeren Theile B.D. (Diese Construction ist identisch mit der der Sekante DAB der Fig. 42, und wird also hier nicht weiter erläutert.) Dann nehme man die Linie BE als Durchmesser an, und beschreibe um dieselbe einen zweiten Kreis, welcher den ersten in den beiden Punkten A und F schneidet. Die Linie AB, welche einen dieser Punkte, A, mit B verbindet, ist Tangente für den ersten Kreis, weil der $\angle$ BAE als Winkel im Halbkreise ein Rechter ist, und sie also zum Radius AE senkrecht steht (was für die Tangenten charakteristisch ist). Diese Tangente AB ist nun die gesuchte mittlere Proportionale. Es sind jetzt die beiden Dreiecke BAD und BAC ähnlich, da sie einen gemeinschaftlichen $\angle$ ABD haben, und der $\angle$ BAD = $\angle$ ACB ist. Daraus folgt die Proportion

$$BC : BA = BA : BD, \text{ oder}$$
$$a : BA = BA : b, \text{ d. h.}$$
$$a : x = x : b.$$

Statt der Linie BA hätten wir auch die ihr gleiche Tangente BF nehmen können. Die Identität der Länge von BA und BF folgt aus der Congruenz der Dreiecke BAE und BFE, welche jedes einen rechten Winkel, dann die gemeinschaftliche Seite BE haben, und in denen $\angle$ ABE und $\angle$ EBF einander gleich sind.

Diese Eigenschaft zweier von einem gemeinschaftlichen Punkte an

denselben Kreis gezogener Tangenten, dieselbe Entfernung vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkte, von A und F bis B, zu haben, ist sehr bemerkenswerth.

§ 95. Wir müssen die Aufmerksamkeit auf das Mittel lenken, welches die vorhergehenden Constructionen liefern, um durch einen außerhalb eines Kreises liegenden Punkt eine Linie zu führen, oder vielmehr zwei diesen Kreis berührende Linien, da man deren immer zwei construiren kann, so lange nicht der gegebene Punkt in der Peripherie liegt. Dann läßt sich überhaupt nur eine einzige Senkrechte auf dem Endpunkte eines Radius errichten.

§ 96. Wir haben so eben die Combinirungen von Linien zu Gleichungen von Verhältnissen benutzt; wir werden sehen, daß ihre Anwendung sich nicht bloß darauf beschränkt, diese Art von Gleichungen darzustellen, sondern, daß sie von großer Hülfe werden können, um die Gleichungen darzustellen, in welchen die Veränderlichen nicht mehr durch das Gesetz der Proportionalität mit einander verbunden sind. Wir werden ferner sehen, daß, wenn die Linien der Rechnung, dem Calcul, zu Hülfe kommen, die Rechnung der Linien-Combinirungen nicht weniger zur Hülfe wird, sei es, daß sie mit Schärfe Längen kennen lehrt, welche die materiellen Operationen nur mit einer größeren Möglichkeit von Irrthümern geben; sei es, daß sie, durch die Combination von Gleichungen zwischen den Linien, die man zu deren Darstellung benutzte, solche Beziehungen feststellt, wie man sie sucht. Zuvor ist es jedoch, um nicht bei jedem Schritte stehen bleiben zu müssen, nöthig, in einer und derselben Digression eine Uebersicht über Anwendung, Hülfsmittel und Schwierigkeit des algebraischen Rechnens zu geben.

Allgemeine Betrachtungen über die Gleichungen.

§ 97. Gleichungen. Zwei verschiedene Ausdrücke ein und desselben Verhältnisses haben uns dazu geführt, den Unbekannten zu

finden, der in einem dieser Ausdrücke sich befand. Die Art, wie wir den Unbekannten frei machten, das Verfahren zur Umformung der Gleichung, war von der Natur der dargestellten Größe in keiner Weise abhängig. Wir haben nur zu gleicher Zeit zwei gleiche Größen vermehrt oder vermindert, ohne zu berücksichtigen, ob dies Verhältnisse oder etwas Anderes waren. Darnach scheint es nun, als ob wir durch dieselben Arten von Umformung, welches auch die auf zwei verschiedene Arten ausgedrückte Größe sei, zu einer Gleichung kommen könnten, welche uns den Werth des Unbekannten in einem dieser Ausdrücke geben würde.

Ehe wir von Umformungen reden, wird es gut sein darzulegen, wie man eine Gleichung bilden kann, in welcher die Quantität, die man kennen will, eingeschlossen ist. Gerade darin liegt die Schwierigkeit. In den vorhergehenden Fragen boten die Verhältnisse oder künstlichen Quotienten ein einfaches Mittel, eine Gleichung hinzustellen; aber es ist nicht immer leicht, die zur Hülfe zu nehmende Größe zu entdecken, welche sich unter zwei verschiedenen Formen darstellen (sich doppelt ausdrücken) läßt, — und es würde sich keine Regel geben lassen, um bezüglich einer gegebenen Frage eine Gleichung zu bilden. Mancher wird in dieser Frage, oder auch außerhalb derselben (da man überall entlehnen kann), eine Hülfsquantität entdecken, die er auf zwei Arten auszudrücken wissen wird, indem er den gegebenen Unbekannten in dem einen seiner Ausdrücke oder auch in beiden zugleich einen Platz gibt; mancher Andere wird, bei derselben Aufgabe, eine ganz andere Hülfsgröße wählen, welche in dem einen oder dem andern ihrer Ausdrücke, oder auch in beiden auf einmal, den Unbekannten enthalten wird. Auf welche Art man nun auch zu einer Gleichung gelange, so wird sie stets gleich geeignet für den zu erreichenden Zweck sein, und nur die Uebung und Umsicht führen hierbei zum Ziele.

§ 98. Ein Beispiel der verschiedenen Art und Weise, wie man ein und dieselbe Frage ansehen kann, um eine Gleichung herzustellen, ist das folgende.

Es ist mir wichtig, vor dem Verlaufe von zwölf Stunden einen Freund zu erreichen, der zwanzig Lieues Vorsprung hat und in jeder Stunde drei Lieues zurücklegt. Man schlägt mir ein Transportmittel vor, das mich in den Stand setzt, fünf Lieues in jeder Stunde zu machen. Ehe ich hierauf eingehe, will ich wissen, ob auf diesem Wege ich meinen Freund noch in schicklicher Zeit erreiche, und ich befrage darüber drei verschiedene Personen A, B und C.

A sagt mir: „Sie wollen die Zahl der Stunden kennen, während welcher dieser Wagen Sie unterwegs hält; indem wir diese Zahl vorläufig durch x bezeichnen, können wir, mit seiner Hülfe, auf zwei Arten den Weg auswerthen, den Sie durchmessen haben werden, um an Ihrem Ziele anzukommen. (Dieser Weg hängt in der That von der auf seine Zurücklegung verwendeten Anzahl Stunden ab.) Man kann ihn darstellen einerseits durch $5x$, weil fünf Lieues in der Stunde zurückgelegt werden; andrerseits kann man ihn ebenso durch zwanzig Lieues ausdrücken, plus dem Wege, den der Freund in derselben Zeit zurücklegt, d. h. durch $(20 + 3a)$, da er drei Lieues in der Stunde macht.

Wir haben also die Gleichung

$$5x = 20 + 3x;$$

unterdrücken $3x$ auf jeder Seite der Gleichung, und erhalten

$$2x = 20,$$

dividiren beide Seiten durch 2, so haben wir

$$\underline{x = 10}$$

als die letzte Gleichung, welche die Lösung unserer Aufgabe enthält. — Sie werden 10 Stunden gebrauchen."

B sagt mir: „In dieser Frage liegt eine direkte Proportionalität; — nämlich zwischen den Wegen, welche Beide bis zum Punkte des Zusammentreffens durchlaufen haben werden, und den verschiedenen Geschwindigkeiten, mit denen sie sich bewegen. Ich kann also leicht den Weg finden, den Sie zurückzulegen haben, und daraus die hierzu nöthige Anzahl Stunden ableiten. Ist der Weg, den der

Freund gemacht hat, x, so werden Sie 20 + x gemacht haben. Wir haben also die Gleichung

$$\frac{5}{3} = \frac{20x + x}{x},$$

woraus wir durch Umformung finden

$$5x = 3(20 + x) = 60 + 3x,$$

und durch Wegnahme von 3 x auf beiden Seiten

$$2x = 60, \text{ also, durch 2}$$

dividirend, $x = 30$.

Ihr Freund wird also 30 Lieues gemacht haben außer dem Vorsprunge von 20, ehe Sie ihn einholen. Es bleiben Ihnen also 50 Lieues zu machen, wozu Sie, mit 5 Lieues in der Stunde, 10 Stunden Zeit gebrauchen werden."

Endlich sagt mir C: „Ich sehe hier eine umgekehrte Proportionalität; nämlich zwischen den Geschwindigkeiten und der Anzahl Stunden, welche Jeder zur Durchmessung desselben Raumes gebraucht. Drückt x die Anzahl Stunden aus, welche Sie gebraucht haben werden, um Ihren Freund einzuholen, so wird Dieser, um denselben Raum zu durchmessen, die gleiche Anzahl Stunden, x, dazu angewendet haben, plus der Zeit, welche er im Voraus auf 20 Lieues verwendet hatte (der Ausdruck dieser Zeit wird erhalten, indem man 20 durch 3 dividirt, d. h. durch die Zahl der in einer Stunde gemachten Lieues), d. h. plus $\frac{20}{3}$. Wir können also folgende Gleichung schreiben:

$$x : x + \frac{20}{3} = 3 : 5,$$

woraus wir herleiten

$$5x = 3x + 20;$$
$$2x = 20;$$
$$x = 10.$$

Sie werden also mit dem Transportmittel, das man Ihnen vorschlägt, zehn Stunden unterwegs sein."

§ 99. Formeln. Wir setzen von nun an voraus, daß wir in jeder uns entgegentretenden Frage eine zu ihrer Lösung geeignete Aufgabe aufzufinden wissen werden. Wir kommen nun zur Anwendung unserer Mittel der Umformung: wir werden sie sehr durch eine Annahme vereinfacht sehen, welche die Resultate aller unserer Rechnungen verallgemeinert. Diese so fruchtbare Annahme besteht darin, die bekannten Größen jeder Frage durch die ersten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, und die Unbekannten durch die Letzten. Man findet in dieser Anwendung von einander unabhängiger Zeichen einen doppelten Vortheil: zunächst, da man nur die zu den Umformungen nöthigen Operationen andeuten kann, bemerkt man immer alle diejenigen, welche man schon gemacht hat, was in dem Falle, wo sich eine solche zeigt, die das Umgekehrte irgend einer anderen vorangehenden ist, gestattet, es sehr leicht zu machen. Dann, da die Buchstabenausdrücke, welche die bekannten Größen oder die Daten (die gegebenen Stücke) einer Frage darstellen, beständig in ihrer Gestalt zu erkennen sind, so bemerkt man diese Daten sehr klar in dem Resultate, was erlaubt, sie daselbst verändern zu können, ihnen verschiedene Werthe zu geben, und folglich dasselbe Resultat auf alle Fragen derselben Natur anzuwenden. Ein so verallgemeinertes Resultat heißt eine Formel. Der Gebrauch der Formeln bewirkt eine große Zeitersparniß: wir werden dies später durch Beispiele darthun.

§ 100. Polynome. Bevor wir die Umformung der ursprünglichen Gleichungen versuchen, wollen wir einen Blick auf ihre Zusammensetzung werfen. Obgleich jede Seite nur eine einzige Größe darstellt, besteht sie dennoch im Allgemeinen aus verschiedenen Gliedern (deren Gesammtheit ein Polynom heißt), welche uns eine Reihe von Additionen und Subtraktionen bieten, die in einer bestimmten Ordnung zu machen sind; diese Ordnung erinnert an die Verbindungen, mittelst deren man die Gleichung aufgestellt hat. Ist die Gleichung einmal geschrieben, so ist es nicht strenge nöthig, diese Ordnung einzuhalten, da das Bestehen der Gleichung nicht davon abhängt. In welcher Art auch wir die Operationen mischen, welche neue Ordnung

wir auch festsetzen mögen, wir werden dasselbe Resultat erhalten. Wir werden am Ende doch immer dieselbe Zahl von Einheiten vereinigt, und von dieser Summe dieselbe Zahl abgezogen haben; es ist gleichgültig, ob wir schreiben

$$9 + 5 - 2 - 3, \text{ oder}$$
$$9 - 3 + 5 - 2, \text{ oder}$$
$$9 - 2 - 3 + 5.$$

Die Sache bleibt dieselbe, und nur die Beziehungen sind umgewendet. — Wir können nun, ohne eine Gleichung zu ändern, die additiven und subtraktiven Beziehungen, welche zur Aufstellung der Gleichung dienten, fallen lassen und sie durch andere, die uns mehr zusagen werden, ersetzen. Ein hinwegzunehmendes Glied z. B. läßt sich von einem beliebigen Gliede hinwegnehmen; hat man nun dasjenige gewählt, von welchem man abziehen will, so kann man seine subtraktive Natur auf dasselbe anwenden und es unter dem Namen eines negativen Gliedes ansehen, das zu einer besonderen Art von Zahlen gehört; die additiven Ausdrücke werden eine andere Art unter dem Namen der positiven Zahlen bilden. Die Zeichen (+) und (—) können alsdann angesehen werden, entweder als die Beziehungen zwischen den auf einander folgenden Gliedern anzeigend, oder als die Repräsentanten der additiven und subtraktiven Eigenschaften, welche den ihnen folgenden Größen einwohnen, Eigenschaften, welche nur dann wirksam werden dürfen, wann und wo man es zweckmäßig findet. Möge einem negativen Ausdrucke ein positiver, nach seinem Zahlenwerthe kleinerer vorangehen, so wird er nichts desto weniger seinen subtraktiven Werth auf ihn ausüben; aber da diese Verbindung ihn nicht ganz und gar verbraucht, bringt sie eine Zahl hervor, die noch die subtraktive Eigenschaft hat, deren Benutzung eine neue Verbindung erlaubt.

§ 101. Positive und negative Ausdrücke. Dieser zwiefache Gesichtspunkt, unter welchem man die Zeichen (+) und (—) ansehen kann, führt uns zu einem wichtigen Resultate. Betrachtet man sie als Anzeige einer positiven oder negativen Fähigkeit, so deu-

ten sie einzig nur eine Entgegensetzung an, welche im Stande ist, eine Neutralisirung hervorzurufen; alsdann können wir in die Gleichungen, mit denselben Kennzeichen (+) und (—), alle Größen einführen, die durch einander neutralisirt werden können. Ein Verlust, der dem Gewinne gleich ist, gibt eine Nullität des Habens; wir können also in eine Gleichung den Gewinn, im Vereine mit dem einen Zeichen, einführen, so wird der Verlust durch das andere bezeichnet werden. — Eine Meile in Einem Sinne, dann eine Meile im entgegengesetzten Sinne machen, führt auf den Ausgangspunkt zurück: es findet Nullität der Ortsveränderung Statt. Wir können also durch (+) eine in dem Einen Sinne gemessene Länge, und durch (—) die in dem entgegengesetzten Sinne gerechnete Länge bezeichnen. Das Bestreben eines Rades, sich nach rechts zu bewegen, hebt das Bestreben, sich nach links zu bewegen, auf: es findet also Nullität der Bewegung Statt. Wenn also (+) die drehende Bewegung in dem Einen Sinne bezeichnet, so bezeichnet (—) die Bewegung im entgegengesetzten Sinne u. s. w.

§ 102. Man muß es sich recht klar machen, daß die Gleichung (die Gleichheit) zweier Seiten und die Beziehungen der Glieder, aus denen diese Seiten bestehen, zwei durchaus von einander unabhängige Dinge sind. Man kann sogar von der Natur dieser Glieder ganz absehen, und ihnen, je nach den Umständen, diejenige Natur, welche uns geeignet scheint, supponiren: die Maße der Größen bezeichnen niemals deren Natur, und es sind deshalb die Operationen, denen man sie unterwirft, durchaus indifferent gegen diese Natur, und bleiben, wie diese auch sein möge, immer dieselben.

§ 103. Wir wollen nun die verschiedenen Modifikationen an uns vorübergehen lassen, welche, unter Benutzung der Buchstabenzeichen, die Anwendungen der vier Umformungsmittel, von denen wir in § 19 sprachen, erfahren, — nämlich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

§ 104. Addition der Polynome. 1°. Addition. Muß man zu dem Polynom (a + b), das speciell ein Binom heißt (oder

ein Polynom aus zwei Gliedern), das Polynom (c — d) addiren, so schreiben wir, da wir die Operation nur andeuten können, zunächst das (+ c) nach (a + b). Was aber mit dem negativen Gliede (— d) machen? Man fügt es ebenso hinzu, wie das positive Glied c hinzugefügt wurde. (Ein Glied, welches kein Zeichen hat, ist positiv, insofern das Vorhandensein des Zeichens (—) unerläßlich ist, um die negative Eigenschaft anzukünden.) Ein negatives Glied nun wird addirt, indem man es hinter das Polynom schreibt, zu dem es addirt werden soll. Die Worte dürfen uns nicht irre führen. Ein negatives Glied zu einem Polynom addiren heißt nichts weiter, als dieses negative Glied in die Lage versetzen, auf dies Polynom eine fakultative Einwirkung zu haben, es diesem Polynom so anfügen, daß es einen Theil desselben bilde. Man erreicht diesen Zweck, indem man das Glied nach den andern Gliedern niederschreibt. Die algebraische Addition ist also nichts anderes, als eine Zusammenfügung, eine Juxtaposition (eine Nebeneinanderstellung).

Sollten diese Betrachtungen zu abstrakt erscheinen, so folgen hier andere einer verschiedenen Art: schreibt man (+ c) nach (a + b), so hat man eine um d Einheiten zu große Zahl addirt, und man muß deshalb das Polynom um diese d Einheiten vermindern, indem man (— d) hinterher schreibt, was das Resultat liefert: a + b + c — d.

§ 105. Subtraktion von Polynomen. 2°. Subtraktion. Haben wir von (a + b) das Binom (c — d) zu subtrahiren, so schreiben wir zunächst (— c) hinter (a + b). In dieser Weise c ganz und gar wegnehmen statt des um d Einheiten verminderten c, heißt d Einheiten zu viel subtrahiren, und man muß also dem zu kleinen Resultate (a + b — c) noch d Einheiten addiren. Auf diese Art hat das Resultat (a + b — c + d) seine ihm gebührende Größe wieder angenommen. Man sieht, wie die Subtraktion nichts als ein einfaches Zueinanderfügen der Polynomen ist mit Umänderung aller Zeichen in dem Polynom, welches abgezogen wird (dem Subtrahendus der Differenz.)

In Folge der beiden vorhergehenden Operationen erlaubt das

Trennen der Verbindungen der verschiedenen Glieder diejenigen zu vereinigen, welche, numerisch gleich, entgegengesetzte Vorzeichen haben, so daß sie in Folge ihres Gegensatzes zu gleicher Zeit verschwinden.

§ 106. Multiplikation von Polynomen. 3°. Multiplikation. Indem wir uns auf die gegenseitige Unabhängigkeit der Glieder eines Polynoms stützen, betrachten wir in jeder Multiplikation den Multiplikandus als eine Vereinigung von Gliedern verschiedener Natur, als eine Vereinigung positiver und negativer Glieder, — und den Multiplikator als eine Vereinigung von Gliedern, welche durch die Beziehungen der Addition und Subtraktion verbunden sind.

Soll $(a + b)$ mit $(c + d)$ multiplicirt werden, so hat man, ohne Schwierigkeit, den Mechanismus der Zahlenmultiplikation anzuwenden. Hatte man 47 mit 23 zu multipliciren, so sah man 47 und 23, ein Jedes als in zwei Theile, $(40 + 7)$ und $(20 + 3)$, zerlegt an; multiplicirte dann nach einander 7 und 40 mit 3 und mit 20, und sah schließlich die Summe dieser partiellen Produkte als das Totalprodukt an. Hier werden wir, indem wir die partiellen Produkte bezeichnen und sie zu einander addiren, folgenden Ausdruck haben: $ac + bc + ad + bd$.

Ist, zweitens, $(a - b)$ mit c zu multipliciren, so ist zunächst die Größe a eine Anzahl von c Male zu wiederholen und anzuzeigen, daß jede dieser Wiederholungen die einer positiven Größe ist, was geschieht, indem man vor das Produkt das Zeichen $(+)$ oder auch gar kein Vorzeichen setzt. Man erhält auf diese Weise ac oder $(+ ac)$. Man muß sodann dieselbe Anzahl Male die Größe b wiederholen und andeuten, daß jede dieser Wiederholungen die einer negativen Größe ist, was geschieht, indem man vor das Produkt das Zeichen $(-)$ setzt, also $(- bc)$ hat. — Die Multiplikation irgend eines Polynoms mit positiven Gliedern würde also keine Schwierigkeit bieten.

Nehmen wir endlich an, daß $(a - b)$ mit $(c - d)$ zu multipliciren sei. Wenn wir mit dem Gliede c allein multipliciren, so erhalten wir $(ac - bc)$; aber wir haben alsdann um d Male das posi-

tive Glied a und das negative Glied b zu viel wiederholt, weil, vor der Multiplikation mit c, wir ihm d Einheiten hätten subtrahiren müssen. Um das wahre Produkt zu haben, muß man also von dem ersten partiellen Produkte $(ac - bc)$ das zweite partielle Produkt $(ad - bd)$ subtrahiren, das aus d mal dem positiven Gliede a und d mal dem negativen Gliede b besteht. In Betreff der Subtraktion haben wir aber gesehen, daß man die zu subtrahirende Größe nach der andern niederschreibt, indem man alle Vorzeichen umkehrt: als Resultat würden wir hier also folgendes Polynom bekommen, $ac - bc - ad + bd$.

Bemerken wir jetzt, daß, wenn man annimmt,

1°. daß die Zeichen (+) und (—) ebenso wie die Buchstaben Faktoren seien;

2°. daß die Multiplikation dieser Faktoren neuer Art zu folgenden Resultaten führt:

$$(+) \times (+) = +,$$
$$(-) \times (+) = -,$$
$$(+) \times (-) = -,$$
$$(-) \times (-) = +;$$

3°. daß, da diese Produkte das Zeichen angeben, welches dem Buchstabenprodukte vorangehen soll;

man zu Resultaten kommt, welche mit den gefundenen völlig identisch sind. [Warum also nicht diese Hypothese zulassen, welche bloß das praktische Verfahren angeht, und ohne jede Schlußfolgerung und durch eine sehr leicht zu behaltende Annahme erlaubt, jede Art des Kalküls sehr schnell auszuführen?]

Man kann übrigens mit diesen Zeichenverbindungen eine gewisse Idee verbinden. Unsere Polynome sind in der That durch einfache Juxtaposition von augmentativen Theilen mit dem Zeichen (+) und diminutiven Theilen mit dem Zeichen (—) gebildet. Ein Polynom mit einem anderen multipliciren, heißt nach und nach eine gewisse Anzahl Male in additiver Weise, dann eine gewisse Anzahl Male in subtraktiver Weise, augmentative oder diminutive Glieder

wiederholen. Ein vermehrendes Glied in additiver Weise wiederholen heißt einen Zuwachs an Vermehrung hervorbringen, also eine Vermehrung bewirken: was man so ausdrückt, daß Vermehrung mal Vermehrung wieder Vermehrung gibt (oder besser: Positives mal Positivem gibt Positives) und (+) mal (+) gibt (+). In subtraktiver Weise ein vermehrendes Glied wiederholen heißt, es durch eine und dieselbe Operation eine gewisse Anzahl Male subtrahiren; heißt also, Verminderung bewirken, was man so ausdrückt, daß Vermehrung mal Verminderung eine Verminderung gibt (Positives mal Negativem gibt Negatives), oder (+) mal (—) gibt (—). In additiver Weise ein verminderndes Glied wiederholen, heißt die Verminderung vermehren, also vermindern; folglich muß (—) mal (+) immer (—) geben. In subtraktiver Weise ein verminderndes Glied wiederholen, heißt es eine gewisse Anzahl Male unterdrücken; ein verminderndes Glied unterdrücken heißt nun, einen Zuwachs des Zahlenwerthes dieses Gliedes hervorbringen. Wenn z. B. um drei von einer Zahl zu subtrahiren, wir diese Subtraktion unterdrücken, wenn wir sie nicht ausführen, so bleibt oder wird diese Zahl um drei Einheiten größer, als die, welche man erhalten wollte. Da nun die Vermehrungen sich nur andeuten lassen, wenn man Buchstabenausdrücke gebraucht, so muß man, wenn (— a) mit (— b) multiplicirt, d. h. b mal das vermindernde Glied von a unterdrückt werden soll, als Resultat (+ a b) schreiben, weil unsere Operation eine Vermehrung von a mal dem numerischen Werthe des Diminutivgliedes hervorgebracht haben wird [der Werth eines Gliedes, wenn man es von dem subtraktiven oder additiven Vermögen, mit dem es ausgerüstet war, entkleidet hat, heißt sein numerischer oder Zahlen-Werth: der Zahlenwerth des Gliedes (— 4) ist 4]; die daraus zu ziehende Folgerung ist, daß Verminderung der Verminderung eine Vermehrung gibt, oder daß (—) mal (—) stets (+) gibt. Will man aus einem materiellen Beispiele die vier vorhergehenden Schlüsse ableiten? Man denke sich ein hydraulisches Rad (die Bewegung dieser Maschinen wird, wie ein Jeder weiß, beschleunigt, wenn man die Wassermenge vermehrt, und wird verlangsamt, wenn man die Reibungen vermehrt).

Wenn man zu dem das Rad treibenden Wasser noch Wasser hinzufügt, so bewirkt man Vermehrung der Vermehrung, und das Rad dreht sich schneller; wenn man Wasser entzieht, oder die Reibung vermehrt, bewirkt man Verminderung der Vermehrung, oder Vergrößerung der Verminderung, und das Rad bewegt sich mit mehr Langsamkeit; endlich wenn man die Reibung vermindert, bewirkt man eine Verminderung der Verminderung und das Rad geht schneller.

§ 107. Da die Multiplikation mit einem Faktor sein Erscheinen in allen Gliedern eines Polynoms nach sich zieht, mit einer Aenderung der Vorzeichen Seitens dieser Glieder, wenn der Faktor negativ ist, und ohne Aenderung, wenn er positiv ist, so folgt, daß, wenn mehrere Glieder denselben Faktor enthalten, man ihn aus ihnen herausnehmen kann, und dann andeutet, daß er sie multipliciren soll, indem man ihn außerhalb einer Parenthese stellt, in welcher sie enthalten sind; $ab + ac - ad$ z. B. kann man darstellen durch $a(b + c - d)$, wenn man a als positiv annimmt, oder durch $-a(d - b - c)$, wenn man ihn als negativ annimmt: man nennt dies, a als gemeinschaftlichen Faktor setzen. Diese Operation, welche einen Theil dessen, was man gemacht hatte, wieder rückgängig macht, und die man als einen Schritt rückwärts bezeichnen könnte, führt oft zu sehr wichtigen Vereinfachungen. Wenn, nach der Unterdrückung des gemeinschaftlichen Buchstabenfaktors, nur Zahlenfaktoren bleiben, wird es leicht, die sie verknüpfenden Operationen auszuführen, und es entsteht dann aus mehreren Gliedern nur Eins. Eine solche sogenannte Reduction ist z. B.

$$3a - 2a + 5a = a(3 - 2 + 5) = a(6) = 6a.$$

Die Zahlenfaktoren, welche in den Buchstabengleichungen sich befinden, heißen Zahlencoefficienten; man schreibt sie immer vor den andern Faktoren, die man nach alphabetischer Ordnung folgen zu lassen pflegt. Bietet ein und dasselbe Glied mehrere solcher Zahlenfaktoren, so vereinigt man sie durch Multiplikation zu einem einzigen; wiederholt sich hierbei ein Buchstabenfaktor mehrere Male, so deutet man diese Mehrfältigkeit durch ein einziges Zeichen, mittelst

eines Exponenten, an; ist der Faktor a z. B. sechs Mal in demselben Gliede, so schreibt man statt a.a.a.a.a.a kürzer a^6.

§ 108. Operationen mit Potenzen. Aus dieser conventionellen Festsetzung folgt, daß das Ergebniß der Multiplikation eines mit einem bestimmten Exponenten versehenen Faktors, mit demselben auch mit einem Exponenten ausgerüsteten Faktors, sich dadurch andeutet, daß man diesem Faktor als Exponenten die Summe der beiden anderen Exponenten gibt; $a^5 . a^7$ ist gleich $a^{5+7} = a^{12}$.

Eine andere Folgerung ist, daß der Quotient der Division eines Monoms (d. h. eines einzigen Gliedes) a^7 durch das Monom a^5 ausgedrückt wird, indem man dem Faktor a die Differenz der beiden Exponenten vom Dividendus und Divisor zum Exponenten gibt, so daß $\frac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = a^2$ ist. Man kann wirklich in den beiden Gliedern der Division den gemeinsamen Faktor a so viel Male, als er sich im Divisor befindet, unterdrücken, oder so viel Male, als es im Divisorexponenten Einheiten gibt; dieser Faktor bleibt also im Dividendus, sobald der Divisor Einheit geworden, nur so oft, als der Exponent dieses Gliedes größer ist, wie der Exponent des andern Gliedes.

Soll man dagegen a^5 durch a^7 dividiren, so wird, wenn man fünfmal den Faktor a in jedem Gliede des Quotienten unterdrückt hat, der Dividendus auf Eins reducirt sein, während der Divisor $a^{7-5} = a^2$ geworden ist. Der Quotient wird sich alsdann als ein Bruch mit dem Zähler Eins, und mit einem Nenner darstellen, der den gemeinschaftlichen Faktor a mit einem Exponenten enthält, welcher die Differenz der Exponenten vom Dividendus und Divisor ist. Man kann, wenn man will, auch keinen Nenner im Quotienten erhalten, indem man die beiden Faktoren a, aus denen er sich bildet, unterdrückt, und andeutet, daß ein ähnliches Fortfallen im Zähler Statt finden muß, sobald er, in Folge irgend welcher neuen Combination, aufhört, Eins zu sein. Diese Andeutung geschieht, indem man statt des vorigen Quotienten den Faktor a mit dem Exponenten (— 2) schreibt, welcher anzeigt, daß, sobald man diesen neuen Ausdruck des

Quotienten mit irgend einer Potenz*) von a multiplicirt, man aus dieser Potenz zwei Mal den Faktor a hinwegnehmen muß, oder, mit andern Worten, von seinem Exponenten zwei Einheiten weglassen.

Auf diese Art geschehen die Multiplikationen und Divisionen durch einfache Additionen und Subtraktionen.

Will man a^5 zur dritten Potenz erheben, so hat man ein Produkt zu bilden, in welches die 5 Faktoren a von a^5 drei Mal treten, d. h. ein Produkt, in welchem der Faktor a sich 3 . 5 mal befindet. Dies Produkt wird durch $a^{3 \cdot 5} = a^{15}$ dargestellt, — die Erhebung in eine gegebene Potenz geschieht also durch eine einfache Multiplikation.

Wir haben unter der Ausziehung der Quadratwurzel die Zerlegung einer Zahl in zwei gleiche Faktoren verstanden; diese Faktoren können selbst wieder als auf gleiche Art zerlegbar angesehen werden. Sie sind mithin Potenzen; aber mit was für Exponenten? Da der Exponent des Produktes zweier Potenzen ein und desselben Faktors nichts anderes ist, als die Summe der Exponenten dieser beiden Potenzen, so muß das Doppelte von dem Exponenten der Quadratwurzel einer Zahl den Exponenten dieser Zahl hervorbringen; die Wurzel von a wird sich also durch $a^{\frac{1}{2}}$ ausdrücken lassen, denn es geben $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ die Eins, den Exponenten von a; die Quadratwurzel von a^5 wird $a^{\frac{5}{2}}$ sein, weil $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$ gleich 5 sind, d. h. gleich dem Exponenten der Zahl, deren Wurzel man zu haben wünscht. Die Ausziehung der Quadratwurzel einer Zahl führt also auf die einfache Division ihres Exponenten durch 2 zurück. Indem man immer die Consequenzen unserer Annahmen verfolgt, erkennt man, daß die Ausziehung der Wurzeln der verschiedenen Grade (die Zerlegung einer Zahl in mehr oder weniger gleiche Faktoren) sich als Division des Exponenten der betreffenden Zahl durch 3, 4 u. s. w. darstellt, so

*) a^2 heißt die zweite, a^3 die dritte, a^4 die vierte Potenz u. s. w.; a ohne Exponenten wird so angesehen, als ob sein Exponent Eins sei, und wird als die erste Potenz von a bezeichnet.

daß im Allgemeinen die Wurzelausziehung durch einfache Divisionen geschieht.

§ 109. Man fühlt, wie groß die Vortheile sein würden, welche man aus den vorhergehenden Betrachtungen zu ziehen im Stande ist, wenn man eine Tabelle besäße, welche alle möglichen Zahlen unter der Gestalt von Potenzen, sowohl ganzer, als gebrochener (als Wurzeln), einer festen Zahl darstellte; die Rechnungen würden sich alsdann auf eine sehr einfache Combination der Exponenten reduciren. Diese Reihe von Exponenten ist unter dem Namen der Logarithmentabelle berechnet worden. Von dem Gebrauche dieser Tafeln zur Umformung der Multiplikationen und Divisionen in Additionen und Subtraktionen haben wir schon gesprochen; und nach dem Gesagten kann ihre Anwendung zur Potenzirung (Erheben zur Potenz) und Radicirung (Wurzelausziehung) keine Schwierigkeiten haben. Will man eine Wurzel vom dritten Grade (eine sogenannte Cubikwurzel, weil die dritte Potenz einer Zahl ein Cubus heißt) ausziehen, so sucht man in der Logarithmentabelle den Logarithmus der gegebenen Zahl, und dividirt ihn durch 3: der Numerus, welcher den Quotienten dieser Division zum Logarithmus hat, ist die gesuchte Wurzel.

Will man dagegen die dritte Potenz bilden, so muß man der Division durch 3 die Multiplikation mit 3 substituiren, und übrigens ganz auf dieselbe Weise verfahren.

Noch eine Bemerkung wollen wir machen: a^5 durch a^5 dividirt, gibt als Quotienten Eins. Dividiren durch a^5 ist aber, wie wir sahen, nichts anderes als mit a^{-5} multipliciren, und diese Multiplikation ergibt a^0, welcher Ausdruck also nichts ist, als ein Zeichen für die Eins. Null kann das Resultat einer Addition oder einer Subtraktion, aber niemals einer Multiplikation oder Division sein.

§ 110. Division von Polynomen. 4°. Division. Da diese Operation nur den Zweck hat, das, was die Multiplikation hervorgebracht hat, wieder aufzuheben, so wird, wenn wir die Grund-

sätze der letzteren Operation immer vor Augen haben, die Division uns keinen Aufenthalt verursachen. Den Dividendus kann man ansehen als hervorgehend aus der allmäligen Verbindung jedes Gliedes des Quotienten mit jedem Gliede des Divisors; gemäß dieser Art der Formation muß die höchste Potenz eines Faktors im Dividendus das Resultat von dem Produkte der höchsten Potenz desselben Faktors im Divisor mit seiner höchsten Potenz im Quotienten sein. Wenn wir also das Glied, das die höchste Potenz eines bestimmten Buchstabens im Dividendus enthält, durch dasjenige dividiren, welches die höchste Potenz des nämlichen Buchstabens im Divisor enthält, so werden wir dasjenige Glied des Quotienten (gebrochen oder nicht) erhalten, welches die höchste Potenz dieses Buchstabens enthält. Dieses erhaltene Glied dient dazu, den ganzen Divisor zu multipliciren, und man subtrahirt vom Dividendus das erhaltene partielle Produkt. Man dividirt von Neuem dasjenige Glied des zweiten Dividendus, welches die höchste übrig bleibende Potenz desselben Faktors enthält, durch das Glied des Divisors, das man schon einmal angewandt hat, und erhält so für den Quotienten ein neues Glied, mit welchem man den ganzen Divisor multiplicirt, um vom zweiten Dividendus wiederum das erhaltene Produkt zu subtrahiren. Dies führt zu einem dritten Dividendus, in Betreff dessen man dieselbe Operation anfängt, welche nach und nach so lange wiederholt wird, bis das Glied, welches man dividiren soll, den fraglichen Faktor in einer Potenz erhält, welche niedriger ist, als diejenige, welche er in dem Gliede, durch welches dividirt werden soll, enthält. Zu größerer Leichtigkeit ordnet man die beiden Polynomen des Dividendus und des Divisors nach Potenzen ein und desselben Buchstabens, d. h. man schreibt ihre Glieder in der Art, daß, von links nach rechts, in den auf einander folgenden Gliedern derselbe Buchstabe eine Abnahme in seinem Exponenten zeigt. In solcher Weise steht also das Glied, das diesen Buchstaben in der höchsten Potenz enthält, immer am meisten links.

Wir wollen ein Beispiel der Zusammensetzung und Zerlegung, d. h. der Multiplikation und der Division, geben.

§ 111. Das Polynom

$$4a^2 + 3ab - 5b$$

ist mit $2a - c$ zu multipliciren; wir bilden, indem wir mit $(+2a)$ multipliciren, ein erstes partielles Produkt

$$8a^3 + 6a^2b - 10ab,$$

da $(4 . a^2 . 2 . a)$ durch Vereinigung der Zahlen-Coefficienten $8a^2 . a$, und durch Vereinigung der beiden Potenzen von a (der zweiten und der ersten) in einen einzigen Faktor mit der Summe der Exponenten $(8a^3)$ entsteht; Aehnliches gilt für $(+6a^2b)$, und für $(-10ab)$. Wir haben sodann mit $(-c)$ zu multipliciren, was uns zum zweiten partiellen Produkte

$$-4a^2c - 3abc + 5bc$$

führt, da $4a^2$ mal c uns $4a^2c$ gibt, und $(-)$ mal $(+)$ das Zeichen $(-)$ für dies Glied ergibt; ebenso muß das zweite Glied das Zeichen $(-)$, das dritte Glied das Zeichen $(+)$ haben, und das Gesammtprodukt ist

$$8a^3 + 6a^2b - 4a^2c - 10ab - 3abc + 5bc.$$

Wollen wir jetzt dieses Polynom durch $(2a - c)$ dividiren, so muß zunächst $8a^3$ durch $2a$ dividirt werden. Dies ergibt, als erstes Glied des Quotienten $\frac{8a^3}{2a}$, und, wenn man hier in beiden Gliedern den Faktor 2 und den Faktor a unterdrückt, $\frac{4a^3}{a} = 4a^2$. Das Vorzeichen dieses Gliedes, mit dem von $2a$ combinirt, muß, da es das von $8a^3$ hervorbringen soll, nothwendiger Weise das Zeichen $(+)$ sein. Das Produkt von $(2a - c)$ mit $(4a^2)$ ist $(8a^3 - 4a^2c)$, welches Polynom man vom Dividendus abziehen muß, indem man es unter den Dividendus schreibt, nachdem man die Vorzeichen seiner beiden Glieder umgeändert hat. Bei seinem Eintritte in den Dividendus hebt das Glied $(-8a^3)$, indem es selbst verschwindet, das Glied $(+8a^3)$ auf: das Glied $(+4a^2c)$ macht in gleicher Weise das Glied $(-4a^2c)$ verschwinden, so daß nach geschehener Subtraktion noch bleibt:

$$6a^2b - 10ab - 3abc + 5bc.$$

Auf dieses Polynom wenden wir dieselbe Operation an, wie zuvor. Die Division von ($6a^2b$) durch ($2a$) führt uns zu ($+3ab$); mit diesem Gliede müssen wir den Divisor ($2a-c$) multipliciren, und haben alsdann von dem neuen Dividendus das Produkt ($+6a^2b-3abc$) abzuziehen, d. h. unter ihn die beiden Glieder ($-6a^2b+3abc$) zu schreiben, welche, indem sie sich selbst aufheben, die Glieder ($+6a^2b-3abc$) verschwinden machen, so daß nach der Subtraktion dieser Dividendus auf 2 Glieder ($-10ab+5bc$) reducirt ist. Die Division des ersteren durch $2a$ gibt das Glied $5b$, welches vom Vorzeichen ($-$) begleitet sein muß, weil sein Vorzeichen, combinirt mit dem Zeichen von $2a$, welches ($+$) ist, das Zeichen ($-$) des Gliedes $10ab$ ergeben soll. Das Produkt von ($2a-c$) mal ($-5b$) von dem dritten Dividendus abgezogen, hebt diesen gänzlich auf. Dies Produkt des Divisors und des neuen Gliedes im Quotienten ist nämlich das Polynom ($-10ab+5bc$), woraus durch Umänderung der Zeichen wird ($+10ab-5bc$).

Wenn die Multiplikation des Dividendus mit einem partiellen Quotienten irgend welches Glied gibt, das nicht in dem Dividendus enthalten ist, so hindert das die Operation nicht; die Subtraktion wird in der zuvor angegebenen Weise ausgedrückt, und die Operation geht weiter. Man wird sehen, daß diese Glieder durch andere aufgehoben werden, welche aus neuen Multiplikationen entstehen werden.

Wir bemerken in Betreff der Ordnung der Glieder:

1°. Wenn in denselben der Faktor, nach welchem das Polynom geordnet wird, mit negativen Exponenten vorkommt, so müssen solche Glieder erst nach denen folgen, welche diesen Faktor mit dem Exponenten Null enthalten (d. h. also, welche diesen Faktor nicht enthalten), — und es muß, bei ihrer Aufeinanderfolge, die kleinere Exponentialzahl der größeren vorangehen, also z. B.

$$a^{-2}+a^{-3}-a^{-4}+a^{-5} \text{ etc.} \cdots$$

2°. Wenn mehrere Glieder dieselbe Potenz desjenigen Buchstabens enthalten, nach dem das Polynom geordnet wird, so ordnet man dieselben unter sich nach einem andern Buchstaben.

§ 112. Da meistentheils die angedeuteten Divisionen nicht möglich sind, so ist die einzige ausführbare Sache, die Verhältnisse zu vereinfachen, indem man den am meisten zusammengesetzten gemeinschaftlichen Faktor aus ihnen herausnimmt, denjenigen, der sich durch die Vereinigung aller gemeinsamen Faktoren bildet. Das Verfahren hierzu ist dem Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Theilers von Zahlen analog. Es ist auf dieselben Grundsätze basirt, und bedarf daher keiner abermaligen Erörterung; wir verweisen auf die früheren Mittheilungen darüber und beschränken uns hier nur auf einige Bemerkungen über Einzelnes der Operation, sobald sie Polynomen betrifft.

Bei der Division des Polynoms vom höchsten Grade (bezüglich des Buchstabens, nach welchem es geordnet wird) durch das andere Polynom, bei der Division dieses letzteren durch den ersten Rest, bei der dieses ersten Restes durch den zweiten u. s. w., muß man Sorge tragen, in dem Divisor-Polynome zu einem einzigen Gliede die verschiedenen Glieder zusammenzufassen, welche den Buchstaben, nach welchem geordnet werden soll, in demselben Grade enthalten, indem man diesen Buchstaben als gemeinschaftlichen Faktor heraustrennt. Ohne dieses würde man die Operation niemals beendet sehen. Kommt ein Faktor vor, welcher allen Gliedern des einen Polynoms, nicht aber allen Gliedern des andern, gemeinschaftlich ist, so kann man folgern, daß er nicht einen Theil des gemeinschaftlichen Theilers bilden wird, und ihn folglich unterdrücken, und dadurch die Divisionen erleichtern. Hat diese Auslassung Statt gehabt, so vermeidet man im Quotienten die gebrochenen Glieder, indem man alle Glieder des Dividendus mit einem geeigneten Faktor multiplicirt, um das erste Glied durch das des Divisors theilbar zu machen. Die Einführung dieses Faktors, welcher, nach der vorerwähnten Vereinfachung, nicht den Gliedern des Divisors gemeinschaftlich sein könnte, kann in keiner Weise den größten gemeinschaftlichen Faktor ändern. Wir bemerken endlich, daß, wenn der gesuchte Faktor von dem Buchstaben unabhängig ist, nach welchem man geordnet hat, er alle Coefficienten der verschiedenen Potenzen dieses Buchstabens theilen muß, sobald

man jede dieser Potenzen vorläufig als gemeinschaftlichen Faktor gesetzt hat. Wie haben nun diese Polynomen sich bilden können, bei denen man einen gemeinsamen Faktor vorausgesetzt hat? Nur dadurch, daß man mit diesem gemeinsamen Faktor die verschiedenen Glieder beider Polynomen, die mit Bezug auf a geordnet waren, multiplicirt hat.

§ 113. Algebraische Brüche. Was die auf algebraische Verhältnisse oder Brüche bezüglichen Operationen betrifft, so sind sie ganz dieselben, wie die auf Zahlenbrüche bezüglichen; wir verweisen deshalb, um nicht wiederholen zu müssen, auf die über diese Operationen gemachten Raisonnements, und begnügen uns, hier an ihre Resultate zu erinnern.

Will man zwei Brüche mit demselben Nenner addiren oder von einander subtrahiren, so muß das Resultat als Zähler die Summe oder die Differenz der beiden Nenner enthalten, und als Nenner den beiden Verhältnissen gemeinschaftlichen. Z. B.

$$\frac{a+b}{d}-\frac{c-e}{d}=\frac{a+b-c+e}{d}.$$

Ist ein Bruch mit einem andern zu multipliciren, so enthält das Produkt im Zähler das Produkt beider Zähler und hat das Produkt beider Nenner zum Nenner. Z. B.

$$\frac{a.c}{b}\times\frac{df}{e}=\frac{acdf}{be}.$$

Ist eine Division auszuführen, so kehrt man den Divisorbruch um, und multiplicirt sodann mit ihm den Dividendusbruch. Z. B.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

§ 114. In diesen verschiedenen Zusammensetzungen läßt die Anwendung der Buchstabenausdrücke die Freiheit, die erhaltenen Resultate zu zerlegen und sie beliebig unter einer der zahlreichen Formen darzustellen, welche zu einer ähnlichen Zusammensetzung führen würden. Z. B. das Verhältniß $\frac{abc}{def}$ kann, wenn man dies will, unter verschiedenen Formen erscheinen:

$$a \times \frac{bc}{def} = \frac{a}{d} \times \frac{bc}{ef} = \frac{a}{de} \times \frac{bc}{f} = \frac{a}{def} \times bc, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

$$= a : \frac{def}{bc} = \frac{a}{d} : \frac{ef}{bc} = \frac{a}{de} : \frac{f}{bc} = \text{ꝛc.} \ldots$$

§ 115. Wenn man das Vorangegangene richtig verstehen will, so muß man die Ausdrücke Multiplikation und Division von der gemeinhin ihnen beigelegten Bedeutung befreien. In unsern Bemerkungen über die gebrochenen Zahlen haben wir schon deren Ungenauigkeit erkannt. Die Zulassung der positiven und negativen Größen läßt noch mehr das Ungenügende, um die verschiedenen Arten der Verbindungen auszudrücken, erkennen. Da andere Worte fehlen, so muß man schon die vorhandenen brauchen; aber, bei der Schwierigkeit, welche sie den klaren und leicht faßlichen Erklärungen entgegensetzen, sieht man, wie mißlich es ist, auf den möglichst allgemeinen Fall eine nur für einen besondern Fall angenommene Nomenclatur anzuwenden.

§ 116. Da uns von nun an bei der Anwendung unserer Umformungsverfahren nichts mehr aufhalten darf, so wollen wir die verschiedenen Arten Gleichungen umformen und, in der natürlichen Reihefolge, mit den sogenannten Gleichungen vom ersten Grade beginnen, d. h. mit denen, welche nur in der ersten Potenz den Ausdruck jedes Unbekannten enthalten und in welchen die Ausdrücke zweier verschiedener Unbekannten nicht einen Theil des nämlichen Gliedes der Gleichung ausmachen können. Wir wollen uns einige Fragen vorlegen, die schicklichen Gleichungen bilden und daraus die Ausdrücke für die Unbekannten ableiten.

§ 117. Gleichungen vom ersten Grade. 1°. Wir kennen, eines Theils, die Summe a zweier unbekannten Größen x und y, und andern Theils ihre Differenz b: wir können daraus diese beiden Größen finden. Da wir die Summe kennen, so haben wir die Gleichung

$$x + y = a;$$

aus der Differenz erhalten wir als zweite Gleichung

$$x - y = b$$

(wobei wir x größer als y voraussetzen).

Diese Gleichungen drücken zwei Bedingungen aus, denen x zu gleicher Zeit entsprechen muß; ebenso ist y derselbe Unbekannte in beiden Gleichungen. Die Identität der beiden Ausdrücke x und die der beiden y können wir am besten ausdrücken, wenn wir die beiden Gleichungen in eine einzige zusammenschmelzen mittelst der Verbindung von je zwei und zwei Seiten, — die erste der einen Gleichung mit der ersten der andern, und die zweite mit der zweiten. Diese Verbindung, welche durch Addition oder Subtraktion, durch Multiplikation oder Division, je nachdem man es am zweckmäßigsten erachtet, geschieht, hat nothwendig eine Gleichung als Resultat, weil man zu zwei gleichen Zahlen Gleiches addiren, Gleiches davon subtrahiren, und ebenso multipliciren und dividiren kann. Man combinirt nun dergestalt, daß nur ein einziger Unbekannter bleibt. In dem gegenwärtigen Falle combinirt man durch Addition, und erhält die Gleichung

$$x + y + x - y = a + b, \text{ also}$$

$$x + x = a + b, \text{ dann}$$

$$2x = a + b.$$

Diese Gleichung hat nur x, und kann nur umgeformt werden, indem man sie durch 2 dividirt; man erhält

$$x = \frac{a + b}{2}, \text{ oder auch}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß die größte der unbekannten Größen gleich der Hälfte der Summe a, plus der Hälfte der Differenz b ist. Um den andern Unbekannten zu erhalten, setzt man in eine der beiden gegebenen Gleichungen statt des Ausdrucks x den gefundenen Werth. Durch diese Substitution erhalten wir in der ersten Gleichung

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + y = a.$$

Führen wir auf jeder Seite zuerst das Glied $(-\frac{a}{2})$, dann ebenso $(-\frac{b}{2})$ ein, so bekommen wir die Gleichung $\frac{b}{2} + y = a - \frac{a}{2}$, dann die andere Gleichung $y = a - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Reduciren wir die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung auf denselben Nenner (ganz wie bei den Zahlengrößen), so führt dies zu $y = \frac{2a - a}{2} - \frac{b}{2}$. Der Zähler $(2a - a)$ ist gleich $a(2 - 1) = a$, und also

$$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2},$$

was uns zeigt, daß der kleinste der Unbekannten gleich der halben Summe a, weniger der halben Differenz b ist.

Wir bemerken, daß bei den Operationen, die zur Erreichung des gewollten Ziels nöthig sind, d. h. also, um eine Gleichung zu erhalten, welche auf Einer Seite nur noch den Ausdruck x und auf der anderen Seite eine Verbindung der bekannten Größen allein hat, man immer das Glied, welches man auf der einen Seite entfernt hatte, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf der andern Seite wieder erscheinen sieht. Nimmt man einen Coefficienten, welcher der ganzen Seite gemeinsam ist, fort, so sieht man ihn auf der andern Seite gemeinsamen Divisor werden; endlich, die Unterdrückung des gemeinsamen Nenners aller Glieder der einen von beiden Seiten zieht dessen Erscheinung auf der andern Seite als gemeinschaftlicher Multiplikator nach sich. — Man kann diese Betrachtungen gebrauchen, um schnell umzuformen und ohne daß man besonderer Schlußfolgerungen bedürfte.

§ 118. Das Resultat, welches wir durch die Anwendung der Verbindung erhielten, die bestimmt ist, aus zwei Gleichungen eine einzige zu machen, heißt Elimination des Unbekannten y. Ohne das Verschwinden des einen Unbekannten wäre die neue Gleichung unnütz gewesen, weil wir, x isolirend, in seinem Ausdrucke y wiedergefunden hätten, und eine unbekannte Größe immer eine solche bleibt,

wenn sie mittelst einer andern Unbekannten ausgedrückt wird. Mit zwei Gleichungen hatten wir aber die Gewißheit, nach Belieben x oder y eliminiren zu können, wie man sich leicht überzeugt. Wir konnten aus einer derselben, z. B. aus $x + y = a$, den Ausdruck von y, als $y = a - x$ entwickeln. [Dieser Ausdruck heißt eine Function von x; jedes Polynom, in dessen Gliedern sich der Ausdruck eines Unbekannten eingeschlossen befindet, heißt eine Function dieses Unbekannten.] Wir konnten ferner dem Ausdrucke y der andern Gleichung $x - y = b$ diesen Ausdruck substituiren. Diese Substitution, deren Zweck ist, die Identität der beiden y auszudrücken, führt zu der Gleichung

$$x - a + x = b,$$

dann zu der anderen

$$x + x = a + b,$$

in welcher x als gemeinsamer Faktor herausgesetzt, so daß

$$x(1 + 1) = a + b, \text{ oder}$$

$$2x = a + b \text{ wird,}$$

die Identität der durch diesen Ausdruck in den beiden ursprünglichen Gleichungen dargestellten Größen anzeigt. Die Elimination ist damit geschehen, und man sieht hieraus, wie bei diesem Verfahren sie immer möglich ist. Dies Verfahren ist aber nur eine Verbindung durch Addition der Gleichungen $x - y = b$ und $y = a - x$, welche zu

$$x - y + y = b + a - x, \text{ dann zu}$$

$$x = a + b - x, \text{ also zu}$$

$$2x = a + b \text{ führt.}$$

Dieser letztere Modus der Elimination ist nur eine einfache Abart des zuerst angewendeten.

§ 119. Wenn eine Frage drei unbekannte Größen enthält, aber auch drei verschiedene Gleichungen mit diesen Unbekannten liefert, so ist ihre Auflösung möglich. Aus der ersten z. B. wird man den Ausdruck eines der Unbekannten als Function der beiden andern ziehen; — man wird ihn dem Ausdrucke dieses Unbekannten in der zweiten und dritten Gleichung substituiren, und diese letzteren werden also nur noch zwei Unbekannte enthalten. Mittelst zweier Gleichungen

zwischen x und y können wir nun diese Größen entdecken; sie führen uns zur Kenntniß der ersten eliminirten Größe. — Dies Eliminationsverfahren ist leicht auf eine beliebige Anzahl gleichzeitiger Gleichungen auszudehnen; wir wollen aber nicht länger hierbei verweilen, und nur als allgemeinen Schluß hinzufügen, daß wegen der Möglichkeit, soviel Unbekannte zu eliminiren, als man Gleichungen hat, weniger eines, man jede Frage auflösen kann, welche ebenso viel Gleichungen wie unbekannte Größen enthält. Jede Gleichung drückt eine Bedingung oder Verknüpfung aus, welcher diese Größen unterworfen sein müssen.

§ 120. 2°. Wir wollen die Summe von n auf einander folgenden Gliedern einer arithmetischen Progression finden. Gegeben sind das erste Glied a, das letzte l und die Differenz (oder Ratio) r. — Jedes Glied ist, wie man weiß, gleich dem vorhergehenden, plus der Differenz (die positiv oder negativ ist, je nachdem die Progression eine zu- oder abnehmende ist), so daß das zweite Glied durch $a + r$, das dritte durch $a + 2r$, 2c., dargestellt werden. Das schon durch l ausgedrückte Glied wird $a + (n - 1) r$. [Die Zahl, welche die Differenz multiplicirt, ist immer um Eins kleiner, als diejenige, welche die Stelle des Gliedes angibt.] Die unbekannte Summe x wird nun zum Ausdrucke haben:

$$x = a + (a + r) + (a + 2r) + \cdots\cdots + [a + (n - 1) r].$$

Der gesuchte Ausdruck soll aber nur a, l, r enthalten; aus dieser letzten Gleichung müssen also alle Zwischenglieder verschwinden, und dies geschieht auf folgende Weise. Wie man auch die Reihefolge der hier oben geschriebenen Glieder wählen möge, die Summe aller Glieder muß dieselbe bleiben, und wir können sie darum in umgekehrter Ordnung folgendermaßen schreiben:

$$x = [a + (n - 1) r] + \cdots\cdots + (a + 2r) + (a + r) + a.$$

Summiren wir diese beiden Gleichungen, indem wir, bei der Bildung der rechten Seite der neuen Gleichung die Glieder derselben Stellen zwei und zwei addiren, so erhalten wir

$$2x = [a + a + (n - 1) r] + \cdots\cdots + [a + (n - 1) r + a].$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese n zusammengesetzten Glieder alle gleich sind: alle enthalten sie zweimal das erste Glied, plus $(n-1)$ mal der Differenz, — wir können darum schreiben

$$2x = n.(a+l), \text{ oder}$$
$$= n[2a+(n-1)r].$$

Dieser Gleichung bedurften wir, um mit den einzigen gegebenen Stücken die gestellte Aufgabe zu lösen; wir ziehen daraus

$$x = \frac{n[2a+(n-1)r]}{2} \text{ oder}$$
$$= \frac{n(a+l)}{2}.$$

Ist das erste Glied 1, und die Differenz ist 2, d. h. stellt die Progression die Reihe der ungeraden Zahlen dar, so nimmt diese Formel eine bemerkenswerthe Gestalt an, nämlich

$$x = \frac{n[2+(n-1)2]}{2} = \frac{2n(1+n-1)}{2}$$
$$= n.n = n^2.$$

Dies zeigt, daß, welches auch die Anzahl der auf einander folgenden Glieder sei, welche man unter einander addirt, wenn man die Einheit als Ausgangspunkt nimmt, die Summe beständig dem Quadrate dieser Zahl gleich ist. Wenn man z. B. 15 Glieder nimmt, so wird man das Quadrat der Zahl 15 haben. Diese Eigenschaft der ungeraden Zahlen läßt sich leicht direkt erkennen; z. B.

$$1+3=4=2^2; 1+3+5=9=3^2;$$
$$1+3+5+7=16=4^2; \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Mit Hülfe der beiden gleichzeitigen Formeln

$$l = a+(n-1)r, \quad x = \frac{n(a+l)}{2},$$

welche durch ihre Combinirung erlauben, beliebig eine der fünf Größen a, l, r, n, x zu eliminiren, wird man zwei beliebige unter ihnen finden können, sobald man die drei anderen kennt.

§ 121. 3°. Wir kennen das erste Glied a, das n^{te} Glied l und den Quotienten (Exponenten) q einer geometrischen Progression.

Wir können alsdann, mittelst dieser Daten, die Summe der ersten n Glieder ausdrücken.

Da jedes Glied dem vorhergehenden mal dem Quotienten gleich ist (dieser kann eine ganze oder eine gebrochene Zahl sein), so wird das zweite durch aq, das dritte durch aq^2 rc. ausgedrückt werden; das schon durch l repräsentirte n^{te} Glied wird sein aq^{n-1} (der Exponent, bei jedem Gliede, ist eine Zahl, welche beständig um Eins kleiner ist, als die Zahl, welche die Stelle dieses Gliedes bezeichnet), und die verlangte Summe wird den Ausdruck

$$x = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

haben. Aus dieser Gleichung müssen alle zwischen a und l liegenden Glieder verschwinden. Zu dem Ende multipliciren wir zunächst seine beiden Glieder mit q, was uns ergibt

$$xq = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Subtrahiren wir von dieser zweiten Gleichung die erste, so ist

$$x(q-1) = aq^n - a, \text{ oder } ql = a$$

die verlangte Gleichung. Aus ihr ziehen wir

$$x(q-1) = a(q^n - 1) \text{ und}$$

$$x = a\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right).$$

Ist nun q ein Bruch, so zieht man die zweite Reihe von der ersten ab, und erhält alsdann, als Ausdruck des Unbekannten:

$$x = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Die Vergleichung einer dieser secundären Ausdrücke mit dem ursprünglichen

$$x = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$
$$= a(1 + q + q^2 + \cdots\cdots + q^{n-1})$$

ergibt uns folgendes Resultat:

$$\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1},$$

wozu man auch gelangen würde, wenn man die angedeutete Division ausführte.

Diese Bemerkung kann dienen, zu beweisen, daß $(a^m - b^m)$ durch $(a - b)$ theilbar ist. Wenn in der That wir durch q das Verhältniß von a zu b ausdrücken, so haben wir $a = bq$, $a^m = b^m . q^m$, und folglich

$$a^m - b^m = b^m q^m - b^m = b^m (q^m - 1);$$

andererseits wird $a - b = b(q - 1)$ werden, so daß der Quotient der Division von $a^m - b^m$ durch $a - b$ ausgedrückt werden wird durch

$$\frac{b^m}{b} . \frac{q^m - 1}{q - 1} = b^{m-1} . \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

$$= b^{m-1} . (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^2 + q + 1),$$

welches Produkt, durch Einführung von $\frac{a}{b}$ statt q, sich umwandelt:

$$a^{m-1} + b a^{m-2} + \cdots + b^{m-2} . a + b^{m-1} = \frac{a^m - b^m}{a - b}.$$

§ 122. Gleichungen des zweiten Grades. Gehen wir nun zu den Gleichungen des zweiten Grades über. Sie können vollständige oder unvollständige sein. Erstere sind diejenigen, welche zu gleicher Zeit die erste und zweite Potenz des Unbekannten enthalten, und welche man allgemein darstellen kann durch

$$x^2 + px = q \text{ oder } x^2 + px - q = o.$$

[Um zu dieser Form zu kommen, setzt man x^2 und x beide als gemeinschaftlichen Faktor; — man schafft auf die rechte Seite alle bekannten Glieder und nimmt ihnen durch eine Division den Coefficienten von x^2; so stellt p das Verhältniß des Coefficienten von x zu dem von x^2 vor, und q das Verhältniß der gesammten bekannten Glieder zu demselben Coefficienten; p und q sind positive oder negative Größen.] Die unvollständigen Gleichungen enthalten nur die zweite Potenz von x, mit bekannten Größen verbunden; ihre allgemeine Form ist $x^2 = a$, oder $x^2 - a = o$. [Man kommt zu ihr durch Umformungen, die den vorhergehenden ähnlich sind.] Diese letzteren heißen binomische Gleichungen (oder zweigliederige).

§ 123. Die Auflösung der binomischen Gleichung $x^2 - a = o$, welche $x^2 - p^2 = o$ wird, sobald man durch p die Wurzel der Zahl a bezeichnet, bietet keine Schwierigkeit. Wir haben gesehen, daß $a^m - b^m$) durch $(a - b)$ theilbar ist; wir können also durch eine Division $(x^2 - p^2)$ in zwei Faktoren vom ersten Grade zerlegen und die Gleichung umformen in

$$(x - p)(x + p) = o,$$

wobei $(x - p)$ der Divisor und $(x + p)$ der Quotient ist. [Man erinnere sich, daß das Produkt der Summe zweier Zahlen mit der Differenz derselben gleich der Differenz ihrer Quadrate ist.] Welches ist nun der Werth von x, den diese Gleichung bedingt? Derjenige, welcher die erste Seite annullirt, indem er den Faktor $(x - p)$ gleich Null macht, also $x = + p$; ebenso der Werth, welcher zu demselben Ziele führt, indem er den andern Faktor $(x + p)$ zu Null macht, also $x = - p$. Wir haben also zwischen zwei verschiedenen Auflösungen zu wählen, und stellen dies dar durch

$$x = \pm p \text{ oder}$$
$$x = \pm \sqrt{a}.$$

Es bleibt noch zu erklären, woher diese Mehrheit von Werthen kommt, welche bei den Gleichungen vom ersten Grade nicht Statt fand. Das Zeichen (+) nämlich geht sowohl aus der Combination des Zeichens (—) mal (—), als des Zeichens (+) mal (+) hervor. Wenn man nun, um den Unbekannten zu erhalten, eine positive Zahl in zwei gleiche Faktoren mit demselben Vorzeichen zerlegen muß, so fallen wir in die Unbestimmtheit, welches Zeichen wir wählen sollen, und hierüber können allein die Umstände entscheiden. Der algebraische Kalkül setzt voraus, daß jede Größe, die man ihm unterwirft, gleich fähig sei, positiv wie negativ sein zu können. Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, die einzigen zur Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade nöthigen Operationen, lassen nicht den Doppelsinn zu, in welchen uns die Nothwendigkeit, Wurzeln auszuziehen, führt. Wir wollen von nun an, ohne auf diese Betrachtungen zurückzukommen, das Zeichen $\sqrt{\ }$ als von den beiden Zeichen (+) und (—) zugleich begleitet ansehen, so daß damit in

jeden Ausdruck, in dem es sich befindet, eine Mehrheit von Werthen eingeführt wird. — Es ist ohne Zweifel unnütz, zu bemerken, daß die Größe a, welche durch ihre Subtraktion das additive Glied x^2 annulliren soll (ein Quadrat ist nothwendiger Weise eine positive Größe), nur positiv sein kann; sie als negativ annehmen hieße, aus dem subtraktiven Gliede $(-a)$ ein additives Glied $(+a)$ machen, welches alsdann das andere Glied nicht würde neutralisiren können.

§ 124. Die vollständige Gleichung vom zweiten Grade,

$$x^2 + px = q$$

läßt sich nicht so wie die vorhergehende behandeln; aber wenn wir, durch Heraussetzen des x als gemeinschaftlichen Faktors, ihr die Form geben

$$x(x + p) = q,$$

so hängt die Auflösung nur von einer sehr einfachen geometrischen Construction ab: es handelt sich darum, durch Linien die Proportion

$$x : \sqrt{q} = \sqrt{q} : (x + p)$$

darzustellen. Wir kommen in folgender Weise zum Ziele. Im Endpunkte der Länge $AB = \frac{p}{2}$, mit dem wir zuvor als Radius eine Kreislinie beschrieben haben (Fig. 41 bis), errichten wir die Senkrechte AC (Tangente an den Kreis), geben ihr die Länge $\sqrt{q}$, und ziehen von ihrem Endpunkte C durch den Mittelpunkt B eine Sekante, welche die Peripherie in den Punkten E und D schneidet. Das Verhältniß der Länge CE zur Längeneinheit ist der Werth x (siehe § 94).

Wollen wir von dieser sinnlichen Darstellung zum algebraischen Ausdrucke übergehen, so wenden wir die bekannte Eigenschaft der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks an [sein Quadrat ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern (Katheten-) Seiten, § 93]. Im Dreiecke CAB ist die Hypotenuse eine neue Unbekannte y, welche von x um eine Größe $\frac{p}{2}$ abweicht. Folglich wird es, wenn wir sie nur kennen, leicht sein, auch x abzuleiten. Die Gleichung

$$y^2 = AC^2 + AB^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

läßt als Quadrat von y uns $q + \frac{p^2}{4}$ erkennen. Dies Quadrat aber kann ebenso gut gebildet worden sein durch

$$+\sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \text{ als durch}$$

$$-\sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

der Kalkül, welcher, ganz allgemein, jede Größe als fähig ansieht, positiv oder negativ zu sein, läßt uns über diesen Punkt in Ungewißheit. Dieselbe Ungewißheit besteht für x, weil man es aus dem einen oder dem andern Werthe von y herleiten kann. Will man es aus y ziehen oder aus

$$x + \frac{p}{2} = +\sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

so wird man haben

$$x = +\sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2};$$

dies ist die Hypotenuse minus den Radius, oder (+ CE). Will man x aus dem negativen Werthe von y ableiten, so wählt man y oder $(x + \frac{p}{2}) = -\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$, und alsdann wird x durch folgende Gleichung bestimmt sein:

$$x = -\sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2},$$

d. h. die Hypotenuse, negativ genommen, und um den negativen Radius vermehrt, oder (— CD).

Bei der Hypothese des positiven x sind wir direkt durch geometrische Construction zum ersten Werthe von x gekommen, zu CE. Würden wir nicht auch, wenn wir diesen Unbekannten negativ annehmen, direkt zu seinem zweiten Werthe CD kommen können? Bei dieser neuen Hypothese wird die Gleichung

$$(-x)(-x + p) = q.$$

Da der erste Faktor (—x) negativ ist, so muß es der zweite ebenfalls sein, da die rechte Seite der Gleichung positiv ist; und da dieser zweite Faktor nur negativ sein kann, wenn die Neutralisirung seines

positiven Theils seinen ganzen negativen Theil erschöpft hat, so stellt er nichts anderes dar als den numerischen Ueberschuß von x über p, also die Größe $(x - p)$, in ihrer negativen Fassung. Die obige Gleichung läßt sich also schreiben:

$$(-x) . [-(x-p)] = q.$$

Dieselbe wird geometrisch ebenso construirt, wie die folgende $x(x-p) = q$, die sich von jener nur durch die Natur der Faktoren der linken Seite der Gleichung unterscheidet. Die Unbekannte von $x(x-p) = q$ findet sich in der Figur durch die Länge CD dargestellt.

Wir sehen also ein und dieselbe geometrische Construction zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen $x^2 + px = q$ und $x^2 - xp = q$, welche letztere dieselbe ist, wie $x(x-p) = q$, auflösen. Das äußere Stück der Sekante ist der positive Werth des Unbekannten in der ersten Gleichung; die ganze Sekante ist die negative Unbekannte. Diese Sekante aber ist die positive Unbekannte der zweiten Gleichung, und das äußere Stück ist die negative Unbekannte.

Wir bemerken, daß bei den verschiedenen Ausdrücken von x das Glied q sich unter dem Wurzelzeichen von einem beständig positiven Gliede $\frac{p^2}{4}$ begleitet findet. Es würde also in der gegebenen Gleichung nicht negativ sein können, ohne zu gleicher Zeit kleiner als das Quadrat des halben p zu sein; das Wurzelzeichen würde sonst über einem negativen Resultate stehen, und jede Größe dieser Natur läßt eine Radicirung nicht zu, da das Produkt zweier gleichen Faktoren mit demselben Vorzeichen nicht von dem Minuszeichen begleitet sein kann.

Wir bemerken auch endlich, daß p in dem zweiten Falle und $(-p)$ in dem ersten die Summe zweier Werthe von x, welche man Wurzeln der Gleichung nennt, ist, und daß das Glied q in beiden Fällen ihr Produkt darstellt.

§ 125. Das Vorhergehende genügt für den Augenblick; wir wollen nicht die Verfahrungsweisen darlegen, welche man zur Auflösung der Gleichungen höherer Grade, als des zweiten, anwendet; und wollen nun, da die Details der algebraischen Rechnung uns

nicht mehr irren können, den Faden der Schlüsse wieder aufnehmen, welche aus der Aehnlichkeit der Dreiecke fließen.

Wir erinnern uns, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie je 2 und 2 parallele Seiten haben oder die einen Seiten auf den anderen senkrecht stehen. (Es ist zur Perpendikularität nicht nothwendig, daß ein wirkliches Treffen der Seiten Statt finde; es reicht hin, daß die Verlängerungen der Seiten rechtwinkelig zu einander stehen würden.)

Fortsetzung der Anwendung der Proportionen.

§ 126. Die Proportionalitäten werden es uns möglich machen, die Verhältnisse der Linien und der ähnlichen Flächen und Körper zu vereinfachen.

§ 127. 1°. Beziehungen der Linien zu einander. Sind die Umfänge zweier ähnlicher Dreiecke zu vergleichen, und durch a und a′, b und b′, c und c′ sind die Paare der homologen Seiten ausgedrückt, so hat man die fortlaufende Proportion

$$a : a' = b : b' = c : c',$$

in welcher die Summe der vorderen Glieder sich zu der der hinteren verhält wie irgend ein Vorderglied zu seinem hinteren Gliede (§ 24), was wir so schreiben $\frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \frac{a}{a'}$; es ist hierbei der Zähler der linken Seite der Gleichung der Umfang des einen Dreiecks, und der Nenner dieser Seite der Umfang des andern Dreiecks. Es verhalten sich also die Umfänge zweier ähnlicher Dreiecke wie zwei homologe Seiten. Das Verhältniß zweier polygonaler Linien ist also durch das zweier gerader Linien ausgedrückt.

§ 128. Da zwei ähnliche Polygone aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind, so besteht eine fortlaufende Proportion zwischen ihren homologen Seiten, die zu demselben Resultate führt:

$$p : p' = a : a',$$

wobei p und p′ die betreffenden Perimeter der Polygone bezeichnen.

§ 129. Sind die beiden Polygone reguläre, so kann man für das Verhältniß der Grundlinien zweier partiellen Dreiecke das ihrer Höhen, welches ihm gleich ist, setzen (§ 81); man sieht alsdann, daß die Perimeter in demselben Verhältnisse stehen, wie die Radien der eingeschriebenen Kreise. Es folgt daraus, daß zwei Kreislinien, welche man als reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl ansehen kann, in demselben Verhältnisse stehen, wie ihre Radien, also auch wie ihre Durchmesser,

$$c : c' = r : r' = d : d',$$

wobei c und c′ die Kreislinien, r und r′ die Radien und d und d′ die Durchmesser bezeichnen.

§ 130. Diese letzte Formel lehrt uns die Maße aller denkbaren Kreislinien kennen, wenn wir nur eine einzige gemessen haben, beliebig welche; denn sobald c′ und die beiden Radien bekannt sind, enthält die Gleichung $\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$ nur noch den Unbekannten c. Wir wollen versuchen die Kreislinie zu messen, deren Durchmesser die Einheit ist, und deren Radius also $\frac{1}{2}$ ist (wobei die Längeneinheit ganz nach Belieben gewählt wird).

§ 131. Wir geben im Prinzipe zu, daß von zwei Linien diejenige, welche durch die andere umschlossen wird, die kürzere von beiden ist: eine Kreislinie ist also immer kürzer als das umschriebene und länger als das eingeschriebene Polygon. Versucht man mechanisch einem kreisförmigen Faden eine polygonale Form zu geben, so sieht man sogleich, daß diese zweite Form nicht der ersteren umschrieben werden kann: vorausgesetzt, daß der Faden nicht dehnbar sei.

Welches ist nun der Perimeter des regulären eingeschriebenen Sechsecks? Jede seiner Seiten entspricht einem Centriwinkel, welcher den sechsten Theil von vier Rechten bildet, und folglich das Drittheil von zwei Rechten: so daß die Summe zweier Winkel an der Grundlinie in jedem partiellen Dreiecke der polygonalen Fläche gleich $\frac{2}{3}$ Rechten ist. Diese Winkel an der Grundlinie sind alle einander

gleich wegen der Gleichheit der ihnen gegenüberliegenden Seiten (alle diese Seiten sind Radien des umschriebenen Kreises), wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man vom Mittelpunkte auf eine Seite des Sechsecks eine Senkrechte fällt, und die Stücke auf einander legt, welche aus der Theilung des partiellen Dreiecks entstehen, dem die Seite als Grundlinie diente. Jeder dieser Winkel ist nun die Hälfte von $\frac{2}{3}$ Rechten, ebenso wie jeder Centriwinkel es ist. Aus dieser Gleichheit der drei Winkel in den partiellen Dreiecken folgt die Gleichheit der drei Seiten (diese folgt aus dem, was bezüglich der Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, gesagt worden ist); die Seiten des eingeschriebenen regulären Sechsecks sind also eben so lang wie die Radien des Kreises, d. h. im gegenwärtigen Falle ist eine jede durch $\frac{1}{2}$ ausgedrückt, so daß der Polygonalumfang $6 . \frac{1}{2}$ oder 3 ist. Der Umfang des Kreises ist also größer als der dreifache Durchmesser des eingeschriebenen Sechsecks.

Gehen wir nun zum Dodekagon, zum Polygon von 12 gleichen Seiten, über. Wenn in Fig. 42 bis DF die Seite des Sechsecks, BH der Durchmesser ist, der zu ihr senkrecht steht und sie, wie den darunter liegenden Bogen, halbirt, so wird BF die Seite des Zwölfecks sein. Diese Seite ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser 1 und dem Abschnitte BE (§ 92), d. h. dem Radius $\frac{1}{2}$, um EG vermindert. Es ist nun aber

$$EG^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \text{ (§ 93) und folglich}$$

$$EG = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1,73205}{4}.$$

Wir haben also

$$BF^2 = 1 \text{ (Durchmesser) mal } \frac{1}{2} - \frac{1,73205}{4} = \frac{2-1,73205}{4} = \frac{0,26795}{4},$$

$$\text{ferner } BF = \frac{\sqrt{0,26795}}{2} = \frac{0,518}{2}.$$

Aus diesem Ausdrucke leiten wir folgenden ab, der den Perimeter des Dodekagons (Zwölfecks) darstellt.

$$12\,BF = \frac{12}{2} \cdot 0{,}518 = 6\,.\,0{,}518 = 3{,}108.$$

Der Umfang des Kreises ist noch größer als diese Zahl. Aus dem Zwölfeck würde man durch dasselbe Verfahren das reguläre 24eck u. s. w. ableiten können, und jedes neue Maß würde der gesuchten Länge sich mehr und mehr nähern. — Andererseits kann man das Maß des umschriebenen Polygons, das jedem eingeschriebenen Polygon entspricht und zugehört, berechnen; man erhält dadurch eine Zahl, die beständig größer ist als das Maß der Kreislinie, aber diesem sich unaufhörlich nähert. Am Ende einer gewissen Zahl von Operationen wird man Decimalstellen erscheinen sehen, welche den zu großen und zu kleinen Maßen gemeinschaftlich sind. Man kann dann mit Sicherheit es behaupten, daß diese Decimalen einen Theil der Kreislinie ausmachen.

Da der zu befolgende Gang der Operationen immer derselbe ist, so wollen wir uns begnügen, zu zeigen, wie die Seite des umschriebenen Sechsecks sich aus der des eingeschriebenen Sechsecks herleiten läßt.

Die ähnlichen Dreiecke AGC und DGF geben folgende Proportion:

$$AC : DF = GB : GE.$$

AC ist die Seite des umschriebenen Sechsecks, $DF = \frac{1}{2}$

$$GB = \frac{1}{2},\ GE = \frac{1{,}73205}{4},\ \text{alſo}$$

$$AC : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1{,}73205}{4},$$

$$AC = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1{,}73205} = \frac{1}{1{,}73205},$$

$$\text{und der Perimeter} = GAC = \frac{6}{1{,}73205} = 3{,}4641.$$

Durch diese Methode [die Umfänge des dem Kreise umschriebenen und eingeschriebenen regulären gleichnamigen Polygone berechnend, zwi-

schen denen der Kreisumfang liegen muß] ist man zu dem folgenden Resultate gekommen

3,1415 2c.

Dieser Decimalbruch hört nicht mit einer bestimmten Stelle auf, wie weit man ihn auch fortsetzen möge, und man kann also keine Einheit finden, die klein genug sei, um eine Kreislinie mit ihrem Durchmesser zu vergleichen. Da nun diese beiden Linien, die von Natur heterogen sind, der Zahl nach incommensurabel erscheinen, so ist man zu der in den Schulen gebräuchlichen und doch sehr gewagten Behauptung gekommen, daß die Quadratur des Kreises nicht existire. Als ob alle Polygone im Allgemeinen nicht ihre Gleichheit des Flächeninhalts unter allen denkbaren Formen behielten und nicht zum Theil numerisch rational seien (rational ist eine Wurzel, deren Werth sich als ganze oder gebrochene Zahl angeben läßt), sobald ihre Oberfläche durch die quadratischen Zahlen 4, 9, 16, 25.... 100 2c. sich ausdrücken läßt.

Wir werden wahrnehmen, daß dieselbe Incommensurabilität zwischen der Diagonale und der Seite eines Quadrats besteht, obschon diese Linien homogen sind und sich mit einander vergleichen, sich messen und mittelst eines Lineal-Maßstabes und des Zirkels quadriren lassen. Nimmt man eine Seite als Einheit an, so ist das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate zweier Seiten, d. h. gleich 1 + 1 oder 2, und die Länge der Diagonale wird durch die Wurzel von 2 ausgedrückt werden, welche man nicht genau in Zahlen auswerthen kann, nicht besser als die der 3, welche wir weiter oben angedeutet haben.

Nicht durch die numerische Incommensurabilität des Verhältnisses dieser verschiedenen Linien unter einander kann man die Nichtexistenz der Quadratur des Kreises darthun, weil einmal die beiden verglichenen Linien heterogen sind, und eine vorangehende Umformung erheischen, um verglichen werden zu können, und dann, weil wir keine Irrationalität in der Geometrie zugeben, und die Quadratur des Kreises nicht von der Kenntniß der einen oder der andern dieser beiden Linien abhängig und ihr untergeordnet ist.

Da endlich die Fläche eines jeden Polygons durch das Produkt zweier geradlinigten Dimensionen, oder mit andern Worten, durch ein Rechteck oder ihm gleiches Quadrat ausgedrückt werden kann, und die Kreislinie einen größeren Raum umschließt, als jedes Rechteck oder Quadrat von gleichem Perimeter, so ist es evident, daß das Produkt der ganzen Kreislinie, oder eines Theils derselben, mit dem Durchmesser, oder umgekehrt, numerisch nur durch eine unbegränzte Bruchzahl ausgedrückt werden kann. Nimmt man aber eine geometrische mittlere Proportionale zwischen den beiden linearen Faktoren, oder nimmt man als Einheit des Maßes ein Rechteck, so kann man nicht nur das genaue Maß des Kreises und das seines Umfanges erhalten, sondern auch das vom Verhältnisse des Durchmessers zur Peripherie (siehe den Anhang).

Die Zahl 3,141592.....2c., welche das Verhältniß des Kreisumfangs zum Durchmesser ist, da wir diese letztere Linie als Vergleichungsglied angenommen haben, wird gemeiniglich durch das abkürzende Zeichen π bezeichnet, welches der Ausdruck für die Länge der Peripherie ist, wenn man den Durchmesser als Einheit nimmt.

§ 132. Wir können uns jetzt des Verhältnisses der Kreislinien unter einander bedienen, um das Maß eines Kreises unter einer, von der gefundenen verschiedenen, Form darzustellen. Jede Kreislinie nämlich steht mit der Kreislinie π in demselben Verhältnisse, wie ihr Durchmesser $2r$ mit der Einheit (dem Durchmesser von π), d. h. wir haben die Gleichung

Kreislinie : $\pi = 2r : 1$, woraus die Kreislinie (c) folgt als

$c = 2r\pi$, so daß das Maß des Kreises

$= \frac{1}{2} r . c = \frac{1}{2} r . 2r\pi = \pi . r^2$ wird.

§ 133. Mittelst des Vorangehenden ist es leicht, die Seiten einer Figur, welche einer andern ähnlich ist, zu finden, wenn die Umfänge der Bedingung entsprechen, ein gegebenes Verhältniß $\frac{m}{n}$ zu haben.

§ 134. 2°. Beziehungen der Flächen zu einander. Wir gehen zu den Beziehungen der Flächen über. Sind s und s′ die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke, b und b′ die Grundlinien, h und h′ ihre Höhen, so findet folgende Proportion Statt:

$$s : s' = \frac{1}{2} b h : \frac{1}{2} b' h' = bh : b' h'.$$

Die Höhen aber sind in demselben Verhältnisse wie die Grundlinien, d. h. $h : h' = b : b'$ (§ 81): also

$$s : s' = b^2 : b'^2,$$

d. h. die Flächeninhalte verhalten sich zu einander wie die Quadrate der homologen Seiten. — Das Verhältniß der Flächen zweier regulären Polygone wird noch immer dasselbe sein, wie das Verhältniß der Quadrate homologer Seiten, und die Kreise werden sich zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Radien.

§ 135. Soll man eine von einer anderen unterschiedene Figur construiren, welche einen Flächeninhalt haben soll, der zu dem der andern Figur in dem Verhältnisse von $\frac{a}{b}$, so wird man damit beginnen, eine der gegebenen ähnliche Figur so zu construiren, daß die homologen Seiten in dem Verhältnisse von $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ stehen. Es wird alsdann nur noch übrig bleiben, diese Figur in eine andere von demselben Flächeninhalte, aber von verschiedener Art, zu construiren, was in der nachfolgenden Weise geschieht. Nehmen wir an, daß man das Pentagon ABCDE (Fig. 43 bis) erhalten habe, so verlängere man die Seite CD nach rechts und nach links, ziehe durch die Punkte B und E die Linien BF und EG, die eine, BF, parallel mit der Diagonale AC, die andere, EG, parallel mit der Diagonale AD; verbinde darnach den Punkt A mit den Punkten F und G, so wird man sehen:

1°. daß das partielle Dreieck ABC durch das Dreieck AFC (von derselben Grundlinie und derselben Höhe),

2°. daß das Dreieck AED durch das Dreieck AGD (von derselben Grundlinie und derselben Höhe)

ersetzt werden können, so daß dies Polygon sich in ein Dreieck AFG

von demselben Flächeninhalte verwandelt findet. Aus diesem Dreiecke kann man noch nach Belieben zu einem Rechtecke oder zu einem Parallelogramme, dem man eine Seite b′ geben wird, mittelst der Gleichung übergehen

$$\frac{1}{2}h.b = x.b';$$

zu einem Quadrate, mittelst der andern Gleichung

$$\frac{1}{2}h.b = x^2;$$

zu einem Kreise, mittelst der dritten Gleichung

$$\frac{1}{2}h.b = x^2.\pi.$$

§ 136. Wir können noch mittelst der Proportionalitäten die Beziehungen der Dreiecksflächen vereinfachen, welche, statt zweier gleicher Winkel, nur einen einzigen haben, und folglich auch die Beziehungen der Parallelogramme, welche nur eine Gleichheit in den Neigungen zeigen. Die Flächeninhalte s, s′ der Dreiecke BAC, DAE (Fig. 44) verhalten sich zu einander, wie AC.BG:AE.DH. Nun findet in den ähnlichen Dreiecken ABG und ADH folgende Gleichung von Verhältnissen Statt,

$$BG:DH = AB:AD, \text{ also}$$
$$s:s' = AC.BA:AE.AD; \text{ d. h.}$$

zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten. Dies liefert das Mittel, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu finden, von welchem man zwei Seiten kennt, sobald der Flächeninhalt eines Dreiecks, das ein und denselben Winkel hat, gegeben ist.

§ 137. Haben die Dreiecke dieselbe Grundlinie, so ist das Verhältniß ihrer Flächen

$$AB:AD,$$

(wenn nämlich in Fig. 44 der Punkt E in den Punkt C fallend gedacht wird).

§ 138. Wenn in Fig. 45 außer zwei gleichen ∠∠ BAC und CAD, und einer gleichen Seite (AC ist beiden gemein) die beiden Dreiecke so sind, daß, wenn man sie auf die in der Figur ausgedrückte Art an einander fügt, die Seiten BC und CD sich in derselben Linie befänden, was erheischt, daß die ∠∠ ACB und ACD zusammen das Maß von zwei rechten Winkeln haben, so zeigen sie Proportionalität zwischen den Grundlinien BC, CD und den äußeren Seiten AB, AD. Eines Theils haben wir

$$s:s' = AB.AC:AD.AC, \text{ oder}$$
$$= AB:AD;$$

anderen Theils

$$s:s' = BC:CD, \text{ folglich}$$
$$AB:AD = BC:CD.$$

§ 139. Wird die Seite AB verlängert, und man zieht DE parallel mit CA, so wird AE = AD, denn das Dreieck EAD zeigt Gleichheit der ∠∠ ADE und AED, und daraus folgt die Gleichheit der ihnen gegenüberstehenden Seiten. Es verhält sich also

$$AB:AE = BC:CD \text{ (§ 138), d. h.}$$

parallele Linien theilen divergirende Linien in proportionale Stücke.

§ 140. Mittelst dieses Satzes kann man eine gegebene Länge in zwei Theile zerlegen, die zwei andern Linien proportionirt sind. Es ist dazu nur nöthig, die Halbirung eines Winkels zu verstehen. Diese geschieht, indem man aus dem Scheitelpunkte als Centrum einen Kreisbogen beschreibt, die Sehne GH zieht, und vom Scheitelpunkte eine Senkrechte auf die Sehne fällt. Dies ist eine Eigenschaft der gleichschenkeligen Dreiecke, d. h. solcher, welche zwei gleiche Winkel haben.

Jetzt können wir die homologen Seiten zweier Figuren finden, wenn die Summe dieser Seiten a sein soll, und ihr Verhältniß $\frac{m}{n}$.

§ 141. 3°. Beziehungen der Körper. Wir kommen endlich zu den Beziehungen der ähnlichen Körper. Man nennt ähnliche

dreieckige Pyramiden diejenigen, welche aus ähnlichen Flächen bestehen, die in derselben Ordnung auf einander folgen. Man denke sich drei Fäden, welche von Einem Punkte divergiren, und eine Ebene durchschneiden, die von diesem Punkte aus mit einer für alle Punkte gleichen Geschwindigkeit sich fortbewegt, so werden die Linien, welche mit einander die Durchschnittspunkte der Ebene mit den Fäden verbinden, in jedem Augenblicke die Basis einer neuen Pyramide bilden. Da kein Grund vorhanden ist, daß die Neigung der beweglichen Ebene gegen jeden dieser Fäden sich ändere, so werden die Linien, von denen die Rede ist, in jedem Augenblicke der Bewegung ihrer zuvor eingenommenen Stellungen parallel sein, so daß die Seiten jeder neuen Pyramide denen aller anderen ähnlich sein werden. Da der Faden, welcher die Höhen repräsentirt oder die Minimal-Abstände der beweglichen Ebene vom Ausgangspunkte, sich in denselben Verhältnissen befindet, wie die drei andern, so wird er ebenfalls in proportionale Theile getheilt sein, dergestalt, daß das Verhältniß dieser Höhen durch das zweier homologer Seiten c und c′ sich ausdrücken läßt; nämlich:

$$h : h' = c : c'.$$

Andererseits werden diese Basen B und B′, welche je 2 und 2 Proportionalität zwischen ihren Seiten zeigen, mithin ähnliche Figuren sind, in demselben Verhältnisse sein, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten c und c′, also

$$B : B' = c^2 : c'^2.$$

Hiernach wird das Verhältniß zweier ähnlicher Pyramiden aus

$$\frac{1}{3}B.h : \frac{1}{3}B'.h', \text{ oder}$$

$$Bh : B'h' \text{ zu dem andern}$$

$$c^3 : c'^3;$$

d. h. die Körperinhalte dieser Polyeder verhalten sich wie die Cuben ihrer homologen Seiten.

§ 142. Zwei Kegel, deren Winkel an der Spitze derselbe ist, und deren Basen parallel laufen, verhalten sich unter einander

$$= \frac{1}{3} h . \pi . r^2 : \frac{1}{3} h' . \pi r'^2, \text{ oder}$$

$$= h r^2 : h' r'^2.$$

Nun verhält sich

$$h : h' = r : r',$$

also verhalten sich die Körper

$$S : S' = r^3 : r'^3.$$

§ 143. Zwei Kugeln, die aus ein und derselben Anzahl ähnlicher Pyramiden bestehen, verhalten sich zu einander

$$= \frac{1}{3} r . s : \frac{1}{3} r' s', \text{ oder}$$

$$= r . s : r' s'.$$

Es bleibt das Verhältniß ihrer Oberflächen zu finden. Jede Kugelfläche kann wie eine Summe von Oberflächen gerader abgekürzter Kegel betrachtet werden. [Man nennt einen geraden Kegel oder conus denjenigen, in dem die von der Spitze gefällte Senkrechte den Mittelpunkt der Basis trifft; man schneidet ihn ab, oder verkürzt ihn, indem man den oberen Theil durch einen Schnitt parallel mit der Basis hinwegnimmt, d. h. also senkrecht zu der Höhe, welche den Namen der Axe annimmt. Der gerade Kegel kann angesehen werden, wie aus der Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreiecks um seine senkrechte Seite entstanden. Die Hypotenuse dieses Dreiecks nimmt den Namen des Apothems oder der Génératrice oder Erzeugungs-Linie an. Der übrig bleibende abgekürzte Theil eines Kegels ist durch ein Trapez erzeugt, das um eine seiner Nebenlinien, die senkrecht zu den parallelen Seiten steht, sich dreht. Die andere Seitengränze führt ebenfalls den Namen der Génératrice.] Wir müssen die Oberfläche eines abgekürzten Kegels, eines Kegelrumpfes, suchen. Diese Oberfläche setzt sich aus unendlich schmalen Trapezen zusammen, welche alle dieselbe Höhe haben; ihr Maß ist also die Hälfte der Erzeugungslinie a multiplicirt mit der Summe der beiden Kreisflächen

$$\frac{1}{2}a.2\pi(R+r)\text{, oder}$$

$$2a\pi\left(\frac{R+r}{2}\right).$$

Es ist nun $\frac{R+r}{2}$ nichts Anderes als EM (Fig. 46), Radius einer horizontalen Schnittfläche, die gleich weit von der oberen wie unteren Grundfläche des abgekürzten Cylinders ist. Dies ist leicht einzusehen: Zieht man die Linien AK, EI parallel mit der Axe GH, so werden wir wegen der Gleichheit der Längen CE und AE die Gleichheit von $CI = IK = EP$ haben, und ferner $PM = AG = r$. Es ist also $EM = R - IK$ und $EM = r + IK$. Diese beiden Gleichungen geben, zu einander addirt,

$$2.EM = R - IK + r + IK$$

$$2.EM = R + r\text{, oder}$$

$$EM = \frac{R+r}{2}.$$

Drücken wir diese halbe Summe der Radien durch r' aus, so ist unser Maß gleich $2\pi r'a$.

Wir können hieraus die Erzeugungslinie a entfernen, indem wir aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACK und MEN (ihre Seiten sind auf einander senkrecht) folgende Proportion herleiten:

$$AC : EN = AK : r'$$

$$a : EN = h : r'\text{, woraus folgt}$$

$$ar' = EN.h,$$

unter h den kleinsten Abstand der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels verstanden. Der Ausdruck $2\pi r'a$ wird dadurch $= 2\pi.EN.h$, und dies drückt aus, daß die Umdrehungsfläche zum Maße die Länge ihrer Axe hat, multiplicirt mit dem Kreisumfange, der zum Radius den auf der Mitte der Erzeugungslinie errichteten, bis zum Durchschnitte mit der Axe verlängerten Perpendikel hat. In dem regulären Halb-Polygon, welches durch seine Umdrehung eine Kugel erzeugen würde, müßten alle diese Perpendikel Radien sein; die Summe der Längen der Umdrehungsaxen würde einen Durch-

messer bilden. Es hat folglich die Oberfläche einer Kugel zu ihrem Ausdrucke

$$2r \,.\, 2\pi r = 4\pi \,.\, r^2, \text{ d. h.}$$

sie ist gleich dem Vierfachen der größten Durchschnittsebene, oder eines größten Kreises.

Ueberträgt man diesen Werth von s auf das Maß des Volums der Kugel, so geht sie aus der Form

$$\frac{1}{3} r \,.\, s \text{ auf die folgende}$$

$$\frac{1}{3} r \,.\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi \,.\, r^3$$

über, oder auf $\frac{8}{6} \pi \,.\, r^3$, welcher Ausdruck, weil $8r^3$ der Cubus von $2r$ oder von d (Durchmesser) ist, sich darstellen läßt durch $\frac{1}{6} \pi \,.\, d^3$.

§ 144. Das Verhältniß zweier Kugelflächen wird sein

$$4\pi \,.\, r^2 : 4\pi \,.\, r'^2, \text{ oder}$$

$$r^2 : r'^2,$$

das ihrer Volumina dagegen:

$$\frac{4}{3} \pi \,.\, r^3 : \frac{4}{3} \pi r'^3, \text{ oder}$$

$$r^3 : r'^3.$$

Zwei Kugeln stehen also in demselben Verhältnisse wie die Cuben ihrer Radien, und ihre Oberflächen wie die Quadrate dieser selben Radien.

§ 145. Wenn wir von der Oberfläche des abgekürzten Kegels zu der des ganzen Kegels übergehen, so setzen wir einfach voraus, daß der Radius der oberen Grundfläche zu Null geworden ist.

§ 146. Der Cylinder ist ein Kegel, dessen Erzeugungslinie mit der Axe parallel ist; r′ ist also senkrecht zu diesen beiden Linien zugleich, es ist der Radius der Grundfläche. Wenn 2r zu gleicher Zeit der Durchmesser der Grundfläche und die Länge der Axe ist, so

wird die Seitenfläche des Cylinders $4\pi r^2$ sein, d. h. dieselbe, wie die einer Kugel, deren Durchmesser 2 r ist. Dies Resultat ist bemerkenswerth. Das Verhältniß des Volums des Cylinders, von dem wir geredet haben, zu dem der Kugel ist folgendes:

$$2\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ oder}$$

$$2 : \frac{4}{3}, \text{ oder } 6:4, \text{ oder } 3:2, \text{ d. h.}$$

die Kugel ist zwei Dritttheile des geraden Cylinders, in welchen man sie einschließen könnte, oder, mit andern Worten, desjenigen geraden Cylinders, den man um sie beschreiben könnte. Ein gerader Kegel von derselben Basis und derselben Höhe wie der obige Cylinder würde ein Dritttheil davon sein; er wäre also die Hälfte der Kugel.

§ 147. Indem man die Kugeloberfläche als durch Umdrehung eines halben größten Kreises (Maximal-Durchschnitt) oder **Meridians** um seinen Durchmesser erzeugt ansieht, so erkennt man, daß der zwischen zwei verschiedenen Stücken dieses Meridians liegende Theil sich zur ganzen Oberfläche verhält, ganz so, wie der von einem der Punkte dieser beweglichen Ebene durchlaufene Weg sich zu dem ganzen Wege verhält, den er durchlaufen muß, um wieder zum Ausgangspunkte zurückzukommen. Betrachtet man den von der Axe der Umdrehung entferntesten Punkt, der in seiner Bewegung einen Kreis erzeugt, den man **Aequator** nennt, so verhält sich jedes **Kugelsegment** (so nennt man die Theile der Oberfläche, mit denen wir uns beschäftigen) zur Kugeloberfläche verhalten, wie der Bogen des Aequators, welchen die beiden ihn begränzenden Ebenen einschließen, sich zum ganzen Aequator verhält.

§ 148. Man muß diese gemessene Oberfläche mit dem Dritttheile des Radius multipliciren, um den Kugelausschnitt zu haben, welchem sie als Umhüllung oder als Basis einerseits dient, und welche andererseits in dem diedrischen Winkel einbegriffen ist, welchen die beiden Stellungen des Meridians bilden; d. h. dieser Kugelaus-

schnitt, welcher ein sphärisches Zweieck oder ein sphärischer Winkel heißt, verhält sich zur Kugel wie sein Oberflächentheil zur Kugeloberfläche.

§ 149. Der Theil der Oberfläche, der durch ein kreisförmiges Segment erzeugt wird, oder, wenn man will, zwischen zwei dem Aequator parallelen oder zur Axe senkrechten Ebene, begränzt liegt, verhält sich zur ganzen Oberfläche wie seine Höhe, d. h. der kleinste Abstand der Ebenen, die sie einschließen, sich zum Durchmesser oder der ganzen Axe verhält. Dies wird erlauben, eine jede beliebige Kugelkalotte (Oberfläche, die zwischen einem Parallelkreise und einer zur Axe senkrechten Berührungsebene liegt) und jede Zone (zwischen zwei Parallelkreisen liegendes Stück der Oberfläche) zu messen.

§ 150. Ein Kreissector erzeugt einen Kugelsector, der sich zur ganzen Kugel verhält wie die Basis (seine sphärische Seite) zur ganzen Oberfläche.

§ 151. Ein Kugelsegment mit Kalotte (Theil der Kugel, zwischen einem Parallelkreise und einer zur Axe senkrechten Berührungsebene) wird erhalten, indem man von dem Volum des Kugelsectors, der diese Kalotte zur Basis haben würde, das Volum eines Kegels subtrahirt, der zur Grundlinie die ebene Seite dieses Segments hat, und zur Höhe den Kugelradius, vermindert um die größte Dicke des Segments.

§ 152. Wenn das Segment eine Zone zur Umhüllung hat, so berechnet man zuerst die ganze Kalotte, von der diese Zone den unteren Theil bildet, — dann das ganze, durch diese Kalotte umschlossene Segment; — endlich berechnet man die um die Zone verminderte Kalotte und das Segment, dem sie als sphärische Seite dient. Letzteres Segment bleibt dann von ersterem zu subtrahiren.

§ 153. Wir haben noch die Berechnung des abgekürzten Kegels, die wir bei der Berechnung der körperlichen Volumina ausließen, nachzuholen. Es sei h die Höhe des abgekürzten Kegels, (h + x) die Höhe des ganzen Kegels, wobei x die Höhe des kleinen Kegels bedeutet, den man abschnitt, um den abgekürzten zu erhalten.

Es ist dann

$$(h + x) : x = R : r,$$

da die Höhen sich unter einander verhalten wie die Radien der Grundflächen, die wir, durch R den größeren, durch r den kleineren, bezeichnen wollen, — und

$$Rx = rh + rx, \text{ woraus wir}$$

$$x(R - r) = rh \text{ ableiten und}$$

$$x = \frac{rh}{R - r}.$$

Das Maß des ganzen Kegels wird sein

$$\frac{1}{3}\pi R^2\left(h + \frac{hr}{R - r}\right);$$

das des abgenommenen kleinen Kegels

$$\frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{hr}{R - r}\right);$$

subtrahiren wir letzteren Ausdruck vom ersteren, so haben wir

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi\frac{hr}{R - r}(R^2 - r^2),$$

und daraus $\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi rh(R + r)$, weil $\frac{R^2 - r^2}{R - r} = R + r$.

Dieser Ausdruck wird leicht umgeformt in

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi Rrh + \frac{1}{3}\pi r^2 h, \text{ oder } \frac{1}{3}h\pi(R^2 + Rr + r^2),$$

welche Formel man in gewöhnlicher Redeweise folgendermaßen ausdrücken würde: Das Volumen eines abgekürzten Kegels hat zum Maße das Dritttheil seiner Höhe multiplicirt zunächst mit dem Kreise, der als Basis dient, πR^2, dann mit dem, welcher die obere Seite bildet, πr^2, und endlich mit dem Kreise, dessen Radius die mittlere

Proportionale zwischen den Radien der beiden vorhergehenden Kreise ist, π R r. [Man kann, in der That, das Rechteck R r durch ein Quadrat R'^2 ersetzen, dessen Seite R′ mittlere Proportionale zwischen R und r sei: dies wird dem Produkte π R r die Form $\pi R'^2$ geben, in welcher man das Maß eines Kreises erkennt.]

§ 154. Dreiecksberechnungen. Wir kennen das Mittel, mechanisch ein Dreieck zu vervollständigen, in welchem von 6 Stücken 3 gegeben sind; aber welch eine Menge möglicher Irrthümer liegt in dieser materiellen Bestimmung der unbekannten Stücke, wenn die Geschicklichkeit des Zeichners und die Vollkommenheit der Instrumente auch noch so groß sein mögen! Es wäre ein großer Vortheil, wenn man die Rechnung auf das Aufsuchen unbekannter Elemente anwenden und auf diese Weise die Resultate mit gewünschter Genauigkeit erhalten könnte. Diese Arbeit würde sehr leicht werden, wenn man in ihren sechs Stücken die Miniaturen aller möglichen Dreiecke kennte, oder doch die Typen nur aller rechtwinkeliger Dreiecke; denn ein jedes nicht rechtwinkelige Dreieck ist die Summe oder Differenz zweier rechtwinkeliger Dreiecke. Man hat das Mittel, diese Reihe von kleinen Dreiecken zu berechnen, gefunden, nämlich:

Ein Winkel am Mittelpunkte von 60 Graden liegt einer Sehne von der Länge des Kreisradius gegenüber; ferner halbirt ein auf diese Sehne senkrecht gezogener Radius dieselbe, so wie den Winkel: daraus folgt, daß in einem rechtwinkeligen Dreiecke, das man so auf einen Kreis legt, daß seine Hypotenuse einen der Radien darstellt, wenn der auf das Centrum gelegte Winkel 30 Grad beträgt, die diesem Winkel gegenüberliegende Seite gleich dem halben Radius ist. Wählen wir als Radius die Längeneinheit, so werden die drei Seiten unsers kleinen rechtwinkeligen Dreiecks:

die Hypotenuse $= 1$,

die dem Centriwinkel gegenüberliegende Seite

$= \frac{1}{2}$, und

die dritte Seite $= \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$, gemäß der Formel vom Quadrate

der Hypotenuse. Wir ergänzen also, ohne die Hülfe materieller Constructionen, und folglich mit aller wünschenswerthen Genauigkeit, einen unserer Dreieckstypen. Aus diesem ersten können wir durch die nachfolgenden Betrachtungen alle anderen ableiten.

§ 155. Bei'm Aufsuchen des Verhältnisses der Kreislinie zum Durchmesser (§ 131) haben wir die Sehne eines Bogens von 30 Graden berechnet. Die Hälfte dieser Sehne wird die einem Winkel von 15 Graden in einem neuen Dreieckstypus (d. h. dessen Hypotenuse die Einheit ist) gegenüberliegende Seite sein, und die dritte Seite sich wie zuvor ableiten lassen. Somit ist ein zweites Dreieck berechnet. — So wie wir von der Sehne eines Bogens von 60 Graden zu der eines Bogens von 30 Graden übergegangen sind, werden wir von dieser letzteren zu der eines Bogens von 15 Graden übergehen, und so fort. Dies wird uns zur vollständigen Kenntniß der Dreiecksformen führen, deren Centriwinkel 30 Grad, 15 Grad, $7\frac{1}{2}$ Grad 2c. sind. Wir kommen endlich zur Bestimmung derjenigen Seite, welche einem sehr kleinen Centriwinkel gegenüber liegt, der als Ausgangspunkt dienen soll, um die allen höheren Winkeln gegenüberliegenden Seiten mittelst einiger Formeln zu erhalten, welche geeignet sind, die Seite zu berechnen, die einer Summe oder einer Differenz von Centriwinkeln gegenüberliegt, sobald man die drei Seiten der Dreiecke kennt, zu denen sie gehören. Wir wollen diese Formeln nun herstellen.

Es seien die beiden Dreiecke ABC, ADE (Fig. 47) in B und in D rechtwinkelig, und auf einen Kreis so gelegt, daß ihre Hypotenusen, vom Mittelpunkte ausgehend, an der Kreislinie enden, und die Grundlinie AD des zweiten in seiner Richtung mit der Hypotenuse AC des ersten zusammenfalle. Wir kennen die drei Seiten eines jeden von ihnen; es handelt sich nun darum, sie zur Auswerthung der Seiten EH und HA eines Dreiecks anzuwenden, das denselben Bedingungen unterliegt, und dessen Centriwinkel die Summe derer der beiden ersten ist. Mit Hülfe der Linie DF, parallel mit BA, theilen wir die Linie EH in zwei Theile, EF und FH, welche wir für sich getrennt berechnen wollen.

Das Dreieck EDF, zu dem EF gehört, und dessen Seite ED wir kennen, ist ähnlich dem Dreiecke ABC, auf dessen Seiten die seinigen senkrecht stehen (§ 89), was folgende Proportion unter den homologen Seiten gibt:

$$EF : AB = ED : CA, \text{ also}$$

$$EF = \frac{ED \cdot AB}{AC}.$$

Es ist ferner FH zu finden; — die Parallelität von DF und BA bedingt die Gleichheit von FH und DG, und die ähnlichen Dreiecke ABC und AGD geben die Proportion

$$DG : CB = AD : AC, \text{ also ist}$$

$$DG = FH = \frac{BC \cdot AD}{AC}.$$

Die Vereinigung der beiden gefundenen Werthe gibt uns den gesuchten,

$$EH = \frac{ED \cdot AB + BC \cdot AD}{AC}.$$

Um AH zu berechnen, bemerken wir, daß diese Linie der Linie AG, vermindert um die Linie GH = DF, also

$$AH = AG - DF.$$

Die Aehnlichkeit der Dreiecke AGD und ABC gibt die Proportion

$$AG : AB = AD : AC, \text{ also ist}$$

$$AG = \frac{AB \cdot AD}{AC}.$$

Die der Dreiecke ABC und EDF gibt

$$DF : BC = DE : AC, \text{ d. h.}$$

$$DF = \frac{BC \cdot DE}{AC}.$$

Subtrahiren wir diesen letzteren Werth von dem vorhergehenden, so erhalten wir folgenden Ausdruck für AH

$$AH = \frac{AB \cdot AD - BC \cdot DE}{AC}.$$

§ 156. Die Formeln, welche sich auf das Dreieck beziehen, dessen Centriwinkel der Differenz derer der beiden gegebenen Dreiecke

ist, sind ebenfalls leicht zu berechnen. Die Seite IK, gegenüber dem Centriwinkel, läßt sich mit der Linie DG mittelst einer Division vergleichen, die auf dieser letzteren Linie durch die Linie IL bewirkt ist, welche mit der Linie AB parallel ist, denn IK ist gleich DG — DL. Da nun DL = EF, wegen der Congruenz der Dreiecke DEF und IDL (sie haben die Hypotenuse von gleicher Länge und auf derselben Linie, und die andere Seite zwei und zwei parallel), so ist IK = DG — EF; dieser Ausdruck führt uns, mittelst der Werthe von DG und EF, wie sie zuvor aufgefunden waren, zu dem folgenden:

$$IK = \frac{DE . AB - BC . AD}{AC},$$

der von dem von EH sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet, welches die beiden Glieder des Zählers trennt.

Endlich erhalten wir den Ausdruck von AK, indem wir zu der bekannten Länge AG die Länge GK hinzufügen, die uns auch bekannt ist, weil sie = IL oder = DF oder endlich = GH ist. Aus dieser Operation geht ein Ausdruck hervor, der von dem Werthe von AH nur durch das Vorzeichen im Zähler unterschieden ist, nämlich

$$AK = \frac{AB . AD + BC . DE}{AC}.$$

§ 157. Mit Hülfe der vorhergehenden Formeln gehen wir leicht von einem Dreiecke, dessen Centriwinkel sehr klein sein wird, zu einem zweiten Dreiecke über, dessen Centriwinkel ein doppelt großer sein wird, dann zu einem dritten, in dem er dreifach sein wird, und so fort. Man hat auf diese Art Tafeln gebildet, welche alle Elemente der Dreieckstypen, nach der Ordnung der Größe des Centriwinkels, enthalten. Man sieht, wie leicht es ist, die unbekannten Elemente eines beliebigen Dreiecks zu berechnen, wenn in den Colonnen dieser Tafeln man alle Elemente eines kleinen ähnlichen Dreiecks findet.

§ 158. Trigonometrische Linien. Diese Elemente oder Theile von kleinen Dreiecken, die also berechnet worden sind, haben Namen erhalten, die wir kennen lernen müssen. Ihre Hypotenuse

heißt immer Radius und wird durch R bezeichnet; die dem Centriwinkel gegenüber liegende Seite heißt sinus, die abgekürzt sin geschrieben wird, und durch cosinus (geschrieben cos) bezeichnet man die Linie, welche das Dreieck vervollständigt. Wir fügen hinzu, daß man, anstatt zu sagen, z. B. „sinus oder cosinus des Dreiecks, dessen Centriwinkel 30 Grad beträgt" nur ganz kurz sagt: „sinus oder cosinus des Winkels von 30°" oder sin 30 und cos 30.

Wenn, statt den Scheitel A des Winkels in den Kreismittelpunkt zu legen (Fig. 48), wir dorthin die Dreiecksspitze C verlegten, so würden wir die beiden Schenkel des rechten Winkels ihre Rollen vertauschen sehen; der bisherige sinus würde cosinus, der bisherige cosinus würde sinus werden; wir würden sie alsdann cosinus und sinus des Winkels c oder ACB nennen. Man erinnere sich, daß der sinus eines Winkels der cosinus seines Complements (Ergänzung zu einem Rechten) ist.

§ 159. In Folge der Anwendung der Ausdrücke von sinus oder cosinus eines Centriwinkels werden die Linien, welche die Namen sinus und cosinus führen, nicht mehr als Elemente eines Dreiecks betrachtet, sondern die eine als der von einem gegebenen Punkte einer der beiden Linien des Winkels auf die andere Linie gefällte Perpendikel, die andere als Abstand des Fußpunktes dieses Perpendikels vom Scheitel dieses Winkels, alle Beide als Längen, deren Veränderung wesentlich an diejenige eines Centriwinkels geknüpft ist. Diese neue Art, diese Linien zu betrachten, wird es erlauben, sie als Maße für Winkel zu betrachten, welche größer als ein Rechter sind; der sinus wird alsdann nicht mehr dem Winkel gegenüber liegen, sondern er wird außerhalb desselben fallen. Da wir unter dem Namen der sinus der Winkel, welche größer als ein Rechter sind, in einer umgekehrten Ordnung alle die Längen wieder erscheinen sehen werden, welche den Winkeln, welche kleiner sind als ein Rechter, als sinus dienen, muß man Sorge tragen, jede Verwirrung von Winkeln zu verhüten, und auf den Sinn Rücksicht nehmen, in welchem der Abstand vom Fuße des sinus zum Scheitel des Winkels (diesen Scheitel als Ausgangspunkt angenommen)

gemessen sein wird. Wenn dieser Abstand, den wir cosinus nennen, von rechts nach links z. B. gemessen ist, so lange der Centriwinkel unter einem Rechten blieb, so wird er von links nach rechts gemessen werden müssen, sobald der in Rede stehende Winkel einen Rechten überstiegen haben wird. Dieser Gegensatz in der Richtung muß in der Rechnung unter einem Gegensatze der Vorzeichen figuriren, so daß das unterscheidende Kennzeichen der stumpfen Winkel ist, einen negativen Kosinus zu haben. Es ist dann leicht, zwei Winkel zu unterscheiden, einen stumpfen und einen spitzen, deren sinus und cosinus denselben Zahlenwerth haben. Diese beiden Winkel sind für einander Supplemente, d. h. ihre Summe wird immer zwei Rechte betragen.

§ 160. Anstatt als Grundformen der Dreiecke solche zu nehmen, deren Hypotenuse den Radius des Kreises darstellt, welcher zur Messung der Winkel dient, könnten wir auch Dreiecke nehmen, in denen die Seite des rechten Winkels, welche im Mittelpunkte des Kreises endet, beständig die Länge des Radius hätte. Es würde alsdann die Hypotenuse ein anderer Radius sein, der durch seine Verlängerung über den Kreis hinaus, zur Sekante würde, und die dritte, im Endpunkte eines Radius senkrechte Seite würde eine Tangente an den Kreis sein. Ein Dreieck dieser Art, in welchem die Seiten als Radius, Tangente und Sekante auszudrücken sein würden, und durch R, tang, sec zu bezeichnen wären, — ein Dreieck dieser Art würde mittelst der Formel vom Quadrat der Hypotenuse leicht zu vervollständigen sein. Durch eine Abkürzung, welche der auf sinus und cosinus angewendeten analog ist, würde man hier von einer Tangente und Sekante eines Centriwinkels sprechen; man würde die Tangente und Sekante des Complementwinkels die Kotangente und Kosekante nennen, und sie durch cotang. oder cot und cosec. bezeichnen.

§ 161. Es haben übrigens die beiden Arten von Dreieckstypen, von denen wir geredet haben, unter sich solche Beziehungen, daß die

Rechnung mit größter Leichtigkeit von einer zur andern führt, und daß man sie sehr wohl abwechselnd oder gleichzeitig, je nach der Gelegenheit, anwenden kann. Wir wollen hier die Verknüpfungen betrachten, welche die einen trigonometrischen Linien an die anderen bindet; sie leiten sich leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ab, deren Seiten von diesen Linien gebildet werden. [Trigonometrisch heißen diese Linien, weil sie zur Messung von Dreiecken, Trigonen, dienen.]

1°. Aus der Vergleichung der Dreiecke ABC und ADC (Fig. 49) ziehen wir folgende Gleichung

$$\frac{R}{\cos a} = \frac{\tang a}{\sin a} = \frac{\sec a}{R}.$$

2°. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AF′G′ und AFG nehmen wir

$$\frac{R}{\cotg a} = \frac{\tang a}{R} = \frac{\sec a}{\operatorname{cosec} a}.$$

3°. Aus den Dreiecken ABC und AF′G′ folgern wir

$$\frac{\sin a}{R} = \frac{\cos a}{\cotg a} = \frac{R}{\operatorname{cosec} a}.$$

Diesen drei Gleichungen fügen wir die drei folgenden hinzu, welche sich auf die Eigenschaft des Quadrats der Hypotenuse gründen. Aus Dreieck ABC:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = R^2.$$

Aus Dreieck ADC:

$$R^2 + \tang^2 a = \sec^2 a.$$

Aus Dreieck AF′G′:

$$R^2 + \cotg^2 a = \operatorname{cosec}^2 a.$$

Mittelst der ersten drei Formeln kann man aus einem Systeme von Linien in das andere, mittelst der letzteren drei von einer Linie zu einer andern desselben Systems übergehen.

§ 162. Wenn wir die conventionellen Ausdrücke, von denen die Rede war, in die Formeln einführen wollen, die zur Berechnung des Sinus und Kosinus einer Summe oder einer Differenz von Winkeln

bestimmt sind, sobald man die sinus und cosinus dieser Winkel kennt, so bezeichnen wir in Fig. 47 den ∠CAB durch a, den ∠CAE oder CAI durch b. Es wird dann EH zum sin (a + b) werden, HA zum cos (a + b), IK zum sin (a — b), und KA zum cos (a — b). Die Linien CB, BA nehmen die Namen von sin a, cos a an, die Linien DE und DA die von sin b und cos b, und CA wird durch R ausgedrückt. Die neuen Formeln, unter denen die Gleichungen nun erscheinen werden, sind:

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cos a}{R},$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b}{R},$$

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos a}{R},$$

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b}{R},$$

Wenn wir die sinus und cosinus eines sehr kleinen Winkel a kennen, so können wir, wie oben gesagt wurde, mittelst der beiden ersten Gleichungen die sinus und cosinus aller Vielfachen des Winkels finden. Nehmen wir nämlich a = b an, so ist

$$\sin 2a = 2 \,.\, \sin a \,.\, \cos a \text{ und}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Setzen wir statt b ferner 2a, so ist

$$\sin 3a = \sin a \,.\, \cos 2a + \sin 2a \,.\, \cos a, \text{ und}$$

$$\cos 3a = \cos a \,.\, \cos 2a - \sin a \,.\, \sin 2a.$$

Wir könnten in dieser Art fortfahren, begnügen uns aber damit, den Gang gezeigt zu haben, den man zur Aufstellung von Tafeln der trigonometrischen Linien, der sogenannten sinus-Tabelle (oder sinus-Tafeln) befolgt hat. Man hat dabei den Nenner R fortgelassen, indem man ihn als Einheit vorausgesetzt hat.

§ 163. Von der Anfertigung der sinus-Tafeln gehen wir zu ihrer Anwendung über. Die rechtwinkeligen Dreiecke ergänzen ist äußerst leicht. Nehmen wir ein Dreieck in Fig. 50 an, dessen

∠ a wir kennen, so wie seine Seite BC (der immer bekannte rechte Winkel ergänzt die Zahl der zur Bestimmung eines jeden Dreiecks nöthigen drei Elemente); wir suchen in der Tabelle den sinus, welcher in den Dreiecksgrundformen dem ∠ a entsprechen würde. Danach finden wir, indem wir annehmen, daß das kleine Dreieck, von welchem der sinus einen Theil bildet, in die Stellung AED versetzt sei (wo DE den gesuchten sinus darstellt), zwischen den homologen Seiten folgendes Verhältniß:

$$AD : \sin a = AB : BC : \text{ AD ist der Radius 1, also ist:}$$

$$1 : \sin a = AB : BC.$$

In dieser Proportion ist die Hypotenuse AB die einzige Unbekannte; hat man sie berechnet, so bleibt nur übrig, von der Formel des Quadrats der Hypotenuse Gebrauch zu machen, um die dritte Seite zu finden.

§ 164. Da der ∠ b das Complement des ∠ a ist, so können wir in der obigen Proportion den sin a durch den cos b ersetzen, wenn wir annehmen, daß cos b der Unbekannte sei. Während dann AB und BC gegeben sind, ziehen wir den folgenden Ausdruck daraus:

$$\cos b = \frac{BC}{AB},$$

welcher lehrt, daß in einem rechtwinkeligen Dreiecke der cosinus jedes spitzen Winkels gleich ist der Seite des rechten Winkels, welche ihn bildet, dividirt durch die Hypotenuse.

§ 165. Wollen wir nun nicht das System der sinus, sondern das der Tangenten in dem Falle, wo der ∠ a und die Seite BC gegeben sind, anwenden, so suchen wir in der Tabelle die Tangente, welche das kleine Dreieck, dessen Centriwinkel b ist, den wir als Complement von a kennen, schließt, und indem wir dies kleine Dreieck in die Lage BFG versetzt denken (FG ist die gesuchte Tangente), finden wir die folgende Proportion zwischen den homologen Seiten:

$$BG \text{ (oder der Radius 1)} : \operatorname{tg} b = BC : AC.$$

Da wir jetzt die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten ken-

nen, so ist es leicht, die Hypotenuse kennen zu lernen (mittelst der Summe der beiden Quadrate).

NB. In Fig. 50 ist zur Erläuterung des § 165 eine Linie GF senkrecht zu BC so zu denken, daß Punkt G zwischen B und C fällt, und Punkt F zwischen B und A.

§ 166. Wir gehen zu den nicht rechtwinkeligen Dreiecken über. Nehmen wir zunächst an, daß man die drei Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 51) gegeben habe. Es sollen dessen Winkel berechnet werden. Wenn die Segmente DB, DC, welche die Höhe AD, auf die Basis gefällt, hier bildet, bekannt wären, so würde man, um die ∠ b und c zu finden, nur diejenige Formel anwenden, welche so eben den cosinus in einem rechtwinkeligen Dreiecke ergab. Wir wollen die Länge dieser Segmente suchen, und beschreiben zu dem Ende um Punkt A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius, der gleich der Seite AC ist, verlängern dann die Seite AB bis zum Durchschnitte mit der Peripherie, und wenden die in § 94 erläuterte Eigenschaft der Sekanten an (daß zwei Sekanten sich umgekehrt verhalten, wie ihre äußeren Stücke); man schreibt die Proportion

$$BE : BC = BC' : BF, \text{ oder}$$

$$(BA + AC) : (BD + DC) = (BD - DC) : (BA - AC).$$

Diese Proportion ergibt den Werth von (BD − DC), welches das einzige unbekannte Glied ist. Wir haben nun zu gleicher Zeit die Summe und die Differenz der Abschnitte BD und DC, was nach § 117 hinreicht, um beide Stücke bestimmen zu können. Der größere Abschnitt BD ist gleich der halben Summe, plus der halben Differenz, d. h. durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$BD = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{BA}^2 - \overline{AC}^2}{BC}, \text{ also}$$

$$BD = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}.$$

Da nun BD bekannt ist, so bringen wir es in die Formel, welche geeignet ist, den cosinus eines Winkels in dem rechtwinkeligen Dreiecke zu geben, welche Formel hier

$$\cos b = \frac{BD}{AB} \text{ ist,}$$

und erhalten die Endgleichung

$$\cos b = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2}{2AB.BC}.$$

§ 167. Wir werden auf dieselbe Weise cos c, so lange $\angle$ c spitz sein wird, berechnen; aber werden wir es noch können, sobald dieser Winkel, stumpf werdend, sich unter der Gestalt A C′ B zeigt? (Punkt C′ in Fig. 51 liegt zwischen D und B.) Die Proportion zwischen den Sekanten und ihren äußeren Stücken wird

$$(BA + AC') : (BC' + 2DC) = BC' : (BA - AC'),$$

und wir ziehen daraus folgende Gleichung

$$\overline{BC'}^2 + 2BC'.DC = \overline{BA}^2 - \overline{AC'}^2,$$

dann diese andere

$$DC = \frac{\overline{BA}^2 - \overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2}{2BC'}.$$

Dieser Werth von D C oder D C′ erlaubt, den Kosinus des $\angle$ A C′ D, Supplement des $\angle$ A C′ B, den wir finden wollen, auszudrücken; die Kosinus zweier Supplement-Winkel weichen von einander aber nur durch ihr Zeichen ab. Sobald wir also den des $\angle$ A C′ D gefunden haben werden, geben wir ihn dem $\angle$ A C′ B durch bloße Aenderung des Zeichens. Der Ausdruck des Hülfskosinus ist dieser:

$$\cos AC'D = \frac{DC}{AC'} = \frac{\overline{BA}^2 - \overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2}{2AC'.BC'}.$$

Die Umänderung des Zeichens im Zähler gibt ihm die folgende Form, die dem Ausdrucke von

$$\cos AC'B = \cos c = \frac{\overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2 - \overline{BA}^2}{2AC'.BC'},$$

angehört.

Wir können jetzt den Schluß ziehen, daß, welches auch der Winkel sei, ob spitz oder stumpf, der Ausdruck seines cosinus stets dieselbe Form behält.

10*

§ 168. Wir bemerken, daß die Kenntniß eines der beiden Abschnitte BD und DC erlaubt, die Höhe des gegebenen Dreiecks leicht zu berechnen.

§ 169. Aus der Formel, welche uns den Werth des Abschnitts BD gegeben hat, kann man eine andere ableiten:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2 . BD . BC,$$

welche ausdrückt, daß in einem nicht rechtwinkeligen Dreiecke das Quadrat der einem spitzen Winkel gegenüber liegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist, minus dem doppelten Rechtecke BD . BC (Fig. 51); dann leitet sich aus der Formel, die den Abschnitt DC oder DC′ gibt, die Gleichung

$$\overline{BA}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2 + 2 BC' . DC'$$

her, welche darthut, daß das Quadrat der einem stumpfen Winkel gegenüber liegenden Seite gleich ist der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, plus dem doppelten Rechtecke BC′ . DC′.

§ 170. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, wo man außer zwei Seiten den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt. Um die dritte Seite zu finden, können wir die Formel des vorhergehenden Falls anwenden, indem wir dabei cos b als bekannt voraussetzen und die dem ∠ b gegenüber liegende Seite als unbekannt, nachdem wir ihr zuvor folgende Form gegeben haben:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 . AB . BC . \cos b.$$

Die Kenntniß dreier Seiten und eines Winkels führt uns dann zu einem weiterhin zu prüfenden Falle, in welchem zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen von ihnen gegeben sein werden.

Man kann auch, in dem vorliegenden Falle, unmittelbar die beiden unbekannten Winkel suchen, ehe man die dritte Seite bestimmt. Diese beiden Winkel nämlich müssen den bekannten Winkel zu 2 Rechten ergänzen; wir können also leicht ihre Summe, und also auch ihre halbe Summe finden; um sie zu bestimmen, brauchte man (§ 117) nur noch ihre halbe Differenz zu finden. Diese läßt sich nun auf

mechanischem Wege leicht erhalten, wenn man von Punkt A als Mittelpunkt (Fig. 52) eine Kreislinie zieht, mit einem Radius gleich der Seite AC, dann den Punkt C mit dem Punkte D verbindet, wo die Seite AB den Kreis schneidet. Durch diese Operation wird ∠ ACB in zwei Winkel getheilt, deren einer, ACD, die halbe Summe der unbekannten ∠ c und b ist (wenn wir den ∠ a als bekannt annehmen), weil die beiden gleichen ∠ ACD, ADC dieselbe Summe geben wie die ∠ ACB und ABC oder c und b: in der That ergibt die Addition der einen oder der anderen zum ∠ a den Werth von zwei Rechten. Das andere Winkelstück, DCB, welches man der halben Summe hinzufügen muß, um den ∠ c zu erhalten, kann demzufolge nur die halbe Differenz sein. (Von zwei Größen, haben wir gesagt, ist die größte gleich ihrer halben Summe, vermehrt um die halbe Differenz.) Wenn wir nun die Länge DC als den Radius der Tabelle, oder als die Einheit ansehen, so wird die Senkrechte, welche im Punkte C dieser Linie, im ∠ EDC (die halbe Summe repräsentirend) errichtet und bis zur andern Linie dieses Winkels, bis E, geführt wird, die T a n g e n t e dieser halben Summe in Wirklichkeit darstellen. Der im Punkte D derselben Linie DC, im ∠ DCB (die halbe Differenz repräsentirend) errichtete und bis zum andern Schenkel dieses Winkels, bis Punkt F, geführte Perpendikel wird die Tangente dieser halben Differenz in Wirklichkeit darstellen.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke BDF und BEC wird uns von dieser mechanischen Bestimmung der Tangente der halben Differenz zu der aufs Genaueste berechneten Länge führen. In der That ist in der folgenden daraus hergeleiteten Proportion

$$BE : BD = tg\frac{b+c}{2} : tg\frac{b-c}{2}, \text{ oder}$$

$$(BA+AC) : (BA-AC) = tg\frac{b+c}{2} : tg\frac{b-c}{2}$$

die Tangente der halben Differenz das einzige unbekannte Glied. Haben wir diese Tangente bestimmt, so finden wir in den Tafeln den Winkel, der zu ihr gehört, nehmen davon die Hälfte, fügen diese zur Hälfte der Summe und bekommen dadurch den ∠ c. Der ∠ b wird

erhalten, wenn man subtrahirt, anstatt zu addiren. Die Kenntniß der drei Winkel und zweier Seiten bringt uns abermals zu demjenigen Falle, wo zwei Seiten und der der einen Seite gegenüber liegende Winkel gegeben sind.

Wir haben den ∠ c als spitz angenommen; unsere Constructionen, Schlüsse und Resultate würden noch ganz dieselben sein, wenn dieser Winkel ein stumpfer wäre.

§ 171. Nehmen wir nun als dritten Fall an, daß man zwei Seiten AB und AC (Fig. 53) und den der Seite AC gegenüber liegenden ∠ b kenne. Es ist aufgegeben, den der andern gegebenen Seite gegenüber liegenden ∠ c kennen zu lernen. Eine von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Senkrechte AD theilt das Dreieck in zwei Stücke ABD und ACD, welche als rechtwinkelig nach § 163, der eine zur Proportion

$$1 : \sin b = AB : AD,$$ und

der andere zur Proportion

$$1 : \sin c = AC : AD,$$

führen werden. Die erstere gibt als Werth von AD das Produkt $AB . \sin b$, — die zweite, als Ausdruck für dieselbe Linie, gibt $AC . \sin c$. Beide Ausdrücke ein und derselben Größe geben die Gleichung

$$AB . \sin b = AC . \sin c,$$

worin sin b die einzige Unbekannte ist.

Wir haben angenommen, daß die Senkrechte innerhalb des Dreiecks falle; wenn sie außerhalb fiele, so würden wir noch zu derselben Formel kommen. In der That finden wir in Fig. 54, um AD auszudrücken, einerseits $AB . \sin b$, und

andrerseits $AC . \sin ACD$.

Da nun ACD das Supplement des ∠ C ist, und denselben Sinus wie dieser Winkel hat, so können wir, statt des sin ACD den sin c schreiben, und dadurch zu der oben geschriebenen Gleichung zurückkommen.

Die Kenntniß des ∠ b führt zu der des dritten Winkels. Die unbekannte Seite läßt sich dann sehr leicht mittelst der Gleichung

$$BC \cdot \sin b = AC \cdot \sin a$$

finden, welche wir ganz eben so, wie die vorhergehende, bilden, indem wir nicht mehr BC, sondern AB als Basis nehmen, und in welcher BC die einzige unbekannte Größe ist.

§ 172. Wir kommen endlich zu einem letzten Falle, in welchem wir zwei Winkel und eine Seite als gegeben betrachten. Jede der unbekannten Seiten wird sich mittelst einer Gleichung finden lassen, analog derjenigen, welche wir zuletzt geschrieben haben, d. h. wenn Seite AB gegeben ist, so werden wir, um zur Seite AC zu kommen, die Gleichung benutzen:

$$AB \cdot \sin b = AC \cdot \sin c,$$

in welcher AC der einzige Unbekannte ist; und um die Seite BC zu erhalten, werden wir die andere Gleichung anwenden

$$BC \cdot \sin c = AB \cdot \sin a,$$

worin BC der einzige unbekannte Faktor ist.

§ 173. Jetzt, wo wir durch Rechnung ein Dreieck, von dem drei Stücke einschließlich einer Seite gegeben sind, zu vervollständigen wissen, wollen wir einige Worte über die Fiction sagen, mittelst deren die vorhergehenden Formeln angewendet werden, um die Höhe, die Entfernung und die Beziehungen zur Nachbarschaft für unzugängliche Gegenstände zu berechnen. Wir gehen sofort auf Beispiele ein.

Man sieht einen Leuchtthurm im Meere auf Felsen, und will dessen Höhe kennen. Man denke sich ein großes rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse vom Standpunkte des Beobachters bis zum Gipfel des Thurms sich erstreckt; die Axe des Gebäudes bildet einen Schenkel des rechten Winkels; der andere Schenkel ist die Entfernung, welche den Beobachter vom Fuße dieser Axe trennt. Könnte man direkt sich dieser Axe nähern und die dritte Seite messen, so wie man von der Beobachtungsstation aus, mittelst eines um den Mittelpunkt eines Höhenkreises beweglichen Fernrohrs, das sich vertikal bewegt, den Winkel bestimmen kann, welcher an der Station liegt, so würde man schnell und leicht die vertikale Seite mit Hülfe der Gleichung

$AC = BC . \tang b$ (§ 165) finden, in welcher die senkrecht angenommene Seite AC der einzige Unbekannte sein würde. Dem ist aber nicht so. Wir nehmen ein Dreieck zu Hülfe, dessen Grundlinie auf dem Ufer liegt, und als Länge die Entfernung unserer Station von irgend einem benachbarten bemerkenswerthen Punkte hat und mit dem Scheitelpunkte sich auf den höchsten Punkt des Leuchtthurms lehnt. Dieses neue Dreieck, welches nicht rechtwinkelig ist, wie das vorhergehende, würde, wenn seine Oberfläche materiell wäre, eine Art von Brücke bilden, die sehr breit auf dem Ufer wäre, dann, sich schräg erhebend und an Breite abnehmend, gegen den Gipfel des Gebäudes hin in eine Spitze auslaufen würde. An einem der Endpunkte der Basis stehend, können wir den daran liegenden Winkel messen, indem wir zuerst unser Fernrohr auf den Gipfel und dann auf den anderen Endpunkt richten, auf den wir uns nachher stellen, nachdem wir unterwegs die Entfernung gemessen haben, welche uns davon trennte. Wenn wir auf diesen zweiten Punkt gekommen sind, so messen wir, wie zuvor, den Winkel, dessen Scheitelpunkt hier liegt. Auf diese Weise haben wir uns die Kenntniß der Grundlinie und der beiden ihr anliegenden Winkel für ein zweites Hülfsdreieck verschafft; wir können dies also ganz berechnen und also auch die Hypotenuse des ersten Dreiecks, welche eine Seite des zweiten Dreiecks bildet, bestimmen. Die Hypotenuse und der zuerst gemessene Winkel führen uns zur Kenntniß der gesuchten Höhe, mittelst der Gleichung $BC = AB . \sin a$ (§ 163), in welcher BC, der einzige Unbekannte, die Höhe darstellt, welche wir berechnen wollen.

§ 174. Eine Brandung zeigt sich in der Nähe des oben bezeichneten Leuchtthurms. In welcher Entfernung befindet sie sich von dem Punkte der Küste, den ich selbst einnehme? Man denke sich ein Dreieck, von dem sie die Spitze bildet, und dessen Grundlinie auf der Küste liegt, — messe diese Grundlinie und die beiden an ihr liegenden Winkel, und vervollständige dann das Dreieck in der bekannten Weise aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

§ 175. Es liegt mir daran, die Intervalle vom Leuchtthurme bis zur Brandung zu kennen. Zu diesem Ende berechne ich die Entfernung des Felsens, auf dem der Leuchtthurm steht, bis zu meinem Standpunkte auf der Küste, ganz so, wie ich so eben die Entfernung der Brandung von diesem Punkte berechnet habe. Sodann messe ich den Winkel, den die Linien bilden, welche von diesem selben Punkte, die eine nach der Brandung, die andere nach dem Leuchtthurme gehen. Auf diese Weise kenne ich zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel desjenigen Dreiecks, in welchem die gesuchte Entfernung die dritte Seite bildet. In solchem Falle kann ich also dies Dreieck vervollständigen.

§ 176. Es dürfte nicht unnütz sein, hier einige Worte bezüglich der Art und Weise zuzufügen, wie man die Höhe eines Dreiecks aus der Kenntniß seiner Winkel und seiner Seiten ableitet.

§ 177. Wenn die drei Seiten bekannt sind, so benutzt man den Ausdruck für die Länge BD aus Fig. 51, einen der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte, welchen man in § 166 ausschließlich mit Hülfe der drei Seiten gefunden hat; man führt ihn in die Formel des Quadrats der Hypotenuse ein, die man für Dreieck ABD anwendet, und hat alsdann

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2,$$

worin nur noch das Quadrat der Höhe unbekannt ist.

§ 178. Kennen wir einen der Winkel an der Grundlinie, und diejenige Seite, die von diesem Winkel zur Spitze des Dreiecks geht, so wenden wir die Formel an, welche in dem rechtwinkeligen Dreiecke uns die Länge der, einem spitzen Winkel gegenüber liegenden, Seite gibt, sobald man das Maß dieses Winkels und das der Hypotenuse hat. In dieser Formel (Fig. 50. § 163)

$$BC = AB \,.\, \sin a,$$

wo a den bekannten Winkel, AB die gleichfalls bekannte Seite, die vom Winkel zur Dreiecksspitze geht, darstellt, ist nur die eine unbekannte Größe BC, welche die zu berechnende Höhe bezeichnet.

§ 179. Bestimmung eines Dreiecks aus zwei Elementen. Sobald wir die gegebenen Elemente auf zwei reduciren, wird es nicht mehr möglich sein, das Dreieck vollständig ausdrücken und berechnen zu können; es erscheint dagegen in den Resultaten eine Unbestimmtheit, welche, unter gewissen Annahmen, sehr bemerkenswerthe geometrische Constructionen erzeugen wird, die, dem Kalkül unterworfen, nach dem Belieben des Rechnenden hundert wechselnde Formen annehmen werden.

§ 180. Veränderliche. — Coordinaten-Axen. Nehmen wir an, es sei nur Ein spitzer Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks ABC (Fig. 55) gegeben, z. B. der $\angle$ A. Die Formel

$$BC = AC \,.\, \text{tang}\, A,$$

welche in § 165 dazu diente, einen der Schenkel des rechten Winkels zu finden, sobald der andere Schenkel und ein spitzer Winkel gegeben waren, und also nur Eine Unbekannte enthielt, hat jetzt deren zwei, und erlaubt nur dann die eine derselben zu finden, wenn man der anderen einen willkürlichen Werth beilegt. Dies hat natürlich eine unendliche Menge von Auflösungen zur Folge. Die beiden Unbekannten, deren eine durch ihre Variationen auch beständig Variationen der anderen bedingt, heißen Variable oder Veränderliche. Bezeichnen wir dieselben durch x und y, und tang A durch a, so wird die obige Gleichung

$$y = ax.$$

Wenn man nun bloß die höchsten Werthe von y geometrisch darstellen will, so gibt diese Gleichung eine unbegränzte gerade Linie, die einen Winkel A mit der Linie AC bildet, welche, unbestimmt verlängert, die Axe der x heißt, und einen Winkel (ein Rechter minus A) mit einer anderen Linie, die im Punkte A zu der ersteren Linie senkrecht steht und die Axe der y heißt. Punkt A heißt der Ursprung der x und der y, oder auch bloß der Ursprung; x und y heißen Coordinaten der Punkte der dargestellten Linie, und die Axen der x und der y heißen Coordinaten-Axen.

§ 181. Die so eben erhaltene Linie ist nichts anderes, als eine gemeinschaftliche Hypotenuse für alle rechtwinkelige Dreiecke, deren

Construction mit den gegebenen Stücken möglich ist; sie nimmt nur einen der vier Winkel ein, welche durch die beiden Axen um den Ursprung herum gebildet worden sind (wenn man diese Axen gehörig verlängert denkt); wollte man ihr irgend eine andere Linie in derselben Ebene vergleichen, so müßte man auf die Lage der neuen Linie gegen die Axen Rücksicht nehmen. Es können sich hier für die Untersuchung verschiedene Umstände zeigen.

§ 182. Wenn die durch den Ursprung gehende zweite Linie zum Theil im $\angle$ yAx, zum Theil im $\angle$ XAY liegt, so können wir das erstere Stück durch die Gleichung

$$y = a'x$$

(y und x sind nicht dieselben, wie zuvor, und a' gehört einem von A verschiedenen Winkel an) ausdrücken; — wie aber das andere Stück? Da es eine der ersten Richtung entgegengesetzte hat, da seine x und seine y in solchen Richtungen gemessen worden sind, welche den zuvor eingenommenen entgegenstehen, so kann man diese neuen x und y mit dem Zeichen (—) in die Rechnung ziehen, da sie zuvor mit dem Zeichen (+) darin figurirten. Was die Neigung anbetrifft, so zählt man sie immer oberhalb der Axe der x und nach rechts, so daß ihre Tangente dieselbe bleibt. Als Gleichung für das zweite Stück der neuen Linie erhalten wir also

$$-y = a'(-x) = -a'x.$$

Diese letzte Gleichung kommt, wie man sieht, gänzlich auf die erste zurück, da in dieser die Erscheinung des negativen x sofort dem y einen negativen Werth gibt. Die gesammte Länge der zweiten Linie ist also durch die einzige Gleichung

$$y = a'x$$

ausgedrückt.

§ 183. Liegt die Linie, welche durch den Ursprung geht, zum Theil im Winkel yAX, zum Theil in dem gegenüber stehenden xAY, so übersteigt der Winkel zur Axe der x einen Rechten, und seine Tangente wird negativ. Es müssen auch ferner die x des oberen Theils

als negativ angesehen werden, während die y das Zeichen (+) beibehalten, und die y des unteren Theils erscheinen negativ neben ihren positiv bleibenden x. Als Gleichung für den ersten Theil haben wir also:

$$y = -a''(-x) = a''x$$

(y und x sind wiederum verschieden von den zuvor angewendeten x und y, und a'' gehört zu einem andern Winkel als die waren, welche a und a' zu Tangenten hatten); und als Gleichung für den zweiten Theil der Linie

$$-y = -a''x,$$

welche zu der vorhergehenden zurückkehrt, so wie

$$-y = -a'x \text{ zu } y = a'x$$

wieder zurückkam.

§ 184. Eine einzige Gleichung,

$$y = ax,$$

kann also alle möglichen Lagen einer durch den Ursprung hindurchgehenden Linie ausdrücken, wenn man in geeigneter Weise darin die Zeichen von y, x und a, so wie die Werthe dieser letzteren Größe, verändert.

§ 185. Man denke das veränderliche Dreieck in paralleler Lage*) so aus der bisherigen Lage versetzt, daß sein Scheitel A die Stellung A' einnehme, welche von dem Ursprunge um eine Länge b entfernt ist (Fig. 56), so werden die x sich nicht verändert haben, aber die y werden um diese Größe b gewachsen sein, so daß in dieser neuen Lage gegen die Axen die Linie durch die Gleichung

$$y = ax + b$$

ausgedrückt sein wird.

Wäre statt dessen der Scheitel A um die Länge b unter den Ursprung hinabgegangen, so würden alle y eine Verminderung um die Länge b erfahren haben, und die Gleichung würde

$$y = ax - b$$

geworden sein.

---

*) Der Ausdruck „parallele Lage" ist nicht genau, wenn man die Figg. 55 u. 56 mit einander vergleicht. Anmerk. d. Uebersetzers.

Hätte die Ortsveränderung nach der Richtung der x Axe Statt gehabt, so würden die x von der Vergrößerung oder Verminderung berührt worden sein.

§ 186. Wir wollen nun weiter annehmen, daß nur die Länge der Hypotenuse gegeben sei. In der Formel, welche das Quadrat der Hypotenuse mit den Quadraten der beiden Katheten verknüpft, werden zwei Veränderliche bleiben, so daß sie, wenn man die Hypotenuse durch r bezeichnet,

$$r^2 = x^2 + y^2$$

werden wird. Die Construction der höchsten Punkte der y wird einen Viertelkreis ergeben, der den Ursprung zum Mittelpunkte hat, und auf beiden Axen ruht, — oder vielmehr einen ganzen Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursprung sein wird, denn x^2 und y^2 sind ebensowohl die Quadrate von $(-x)$ und von $(-y)$, als sie es von $(+x)$ und $(+y)$ sind.

§ 187. Legen wir den zuerst auf den Ursprung gelegten Scheitelpunkt auf einen Punkt der x Axe, der von diesem Ursprunge um eine Entfernung r nach links liegt, so sehen wir die Basis AC (Fig. 57), welche noch so eben durch x dargestellt war, nach dieser Operation durch OC ausgedrückt, d. h. das neue x um OA oder r vermindert. Es wird dadurch die Formel für das Quadrat der Hypotenuse $\quad r^2 = y^2 + (x-r)^2 = y^2 + x^2 + r^2 - 2rx$, oder

$$y^2 + x^2 = 2rx.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der Axe der x liegt, in dem Abstande seines Radius von dem Ursprunge, so daß die Axe der y, die im Endpunkte dieses Radius senkrecht steht, eine Tangente darstellt.

§ 188. Wir können durch Rechnung zu dieser schon bekannten Proportion kommen: eine Linie, die die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken einer gegebenen Länge ist, ist nichts Anderes, als die Ordinate y des Kreises, der diese Länge zum Durchmesser hat.

Ist $2r$ diese Länge, x einer ihrer Abschnitte, also $(2r-x)$ der andere, und y die gesuchte mittlere Proportionale, so haben wir die folgende Proportion:

$$x : y = y : (2r - x), \text{ woraus folgt}$$
$$y^2 = 2rx - x^2, \text{ oder}$$
$$y^2 + x^2 = 2rx.$$

§ 189. Wir gehen von den rechtwinkeligen zu den schiefwinkeligen Dreiecken über. Zugleich eine Seite, die Summe der beiden anderen und deren Differenz geben, würde heißen, drei Elemente des Dreiecks bestimmen, aus denen dies vollständig zu finden wäre. Statt dessen wollen wir nun annehmen, daß nur zwei Stücke gegeben seien, zunächst eine Seite und die Summe der beiden anderen.

§ 190. Ellipse. $2a$ sei diese Summe. Nennen wir b die Höhe des Dreiecks in dem Falle, wo es gleichschenkelig ist, wo also die beiden unbekannten Seiten gleich sein würden, und die bekannte Grundlinie durch die Höhe halbirt wäre, so müßte jede Hälfte gleich sein $\sqrt{a^2 - b^2}$, nach dem Satze vom Quadrate der Hypotenuse. In dieser Weise wird die ganze Grundlinie, durch eine gegebene Zahl B bereits dargestellt, als einen anderen Ausdruck

$$2\sqrt{a^2 - b^2}$$

haben, woraus wir die Gleichung ableiten

$$B = 2\sqrt{a^2 - b^2};$$

sie lehrt uns den Werth der Höhe b finden.

Nehmen wir den Mittelpunkt der Grundlinie als Ursprung an und suchen das Verhältniß, das zwischen der Höhe y besteht und der Entfernung x ihres Fußpunktes von dem Ursprunge, so, als ob eine der beiden Größen bekannt wäre und es sich darum handle, die andere zu berechnen (da die Kenntniß einer dieser Größen das fragliche Dreieck vollständig bestimmen helfen würde), so haben wir im Dreiecke BDC (Fig. 58) folgende Beziehung:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2, \text{ oder}$$
$$y^2 = \overline{BC}^2 - (\sqrt{a^2 - b^2} - x)^2.$$

Wir setzen für einen Augenblick voraus, daß x eine bekannte Größe sei; diese Gleichung enthält dann, außer der Veränderlichen y, eine andere unbekannte Länge BC, welche fortgeschafft werden muß. Die Kenntniß von x gibt die beiden auf der Grundlinie durch die Höhe gebildeten Abschnitte; es folgt daraus, daß bei Aufstellung der Proportion für dies Dreieck, welche wir in § 166 zwischen der Summe zweier Seiten, deren Differenz, und der Summe und Differenz der Abschnitte der dritten Seite bestehen sahen, das Glied, welches aus der Differenz der Seiten gebildet ist, als der einzige Unbekannte angesehen und demnach mittelst der drei anderen berechnet werden kann. Wir schreiben diese Proportion

$$(AB + BC) : (AD + DC) = (AD - DC) : (AB - BC),$$

setzen die verschiedenen Werthe ein, welche die vorangehenden Betrachtungen uns verschafft haben, und erhalten dadurch:

$$2a : 2\sqrt{a^2 - b^2} = (\sqrt{a^2 - b^2} + x) - (\sqrt{a^2 - b^2} - x) : [(2a - BC) - BC],$$

oder $a : \sqrt{a^2 - b^2} = x : (a - BC)$, wobei die Reductionen und die Division der ganzen Gleichung durch 2 Statt gefunden haben. Aus dieser Gleichung formen wir

$$a \,.\, (a - BC) = x\sqrt{a^2 - b^2}, \text{ oder}$$

$$a^2 - a \,.\, BC = x\sqrt{a^2 - b^2}, \text{ dann weiter}$$

$$a \,.\, BC = a^2 - x\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Erhebt man, um den Werth von $\overline{BC}^2$ zu erhalten, beide Seiten dieser letzten Gleichung in's Quadrat, setzt den erhaltenen Werth in die erste Gleichung, so kommt man, wenn alle Operationen und algebraische Reductionen, deren Detail wir hier auslassen, beendet sind, zu der Schlußgleichung

$$\underline{a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2},$$

deren geometrische Darstellung eine Curve ist, welche man Ellipse nennt. Wir bemerken, wie wir es bei der Gleichung des Kreises thaten, daß das Auftreten der bloßen Quadrate von y und von x vier Curventheile, die zwei und zwei symmetrisch sind, zu construiren zuläßt; durch ihre Vereinigung bilden sie eine geschlossene Curve, die einem eingedrückten Kreise gleicht. Ein erstes Viertel wird durch die

positiven x und y geliefert; ein zweites durch das positive y und das negative x, ein drittes durch die negativen x und y, und ein viertes durch ein positives x und ein negatives y.

§ 191. Zeichnung einer Ellipse. Diese Curve, welche die Reihe der Scheitel aller Dreiecke von gleichem Umfange, mit fester Basis, enthält, läßt sich leicht auf folgende Art zeichnen: Man befestigt an die beiden Enden F und F′ (Fig. 59) einer gegebenen Grundlinie einen Faden von bestimmter Länge; mit Hülfe eines Bleistifts spannt man diesen Faden so, daß er mit der Basis ein Dreieck bildet; dann führt man den Bleistift schräge, von rechts nach links, oder von links nach rechts, indem man den Faden stets in demselben Grade von Spannung erhält, und ihm nur gestattet, auf dem Papiere fortzugleiten. Der vom Bleistifte gezeichnete Weg ist die verlangte Curve.

§ 192. Der Bleistift wird natürlich die Verlängerungen der festen Basis zwei mal, in gleicher Entfernung von ihren Endpunkten, treffen müssen. Der Punkt nun, wo er die Verlängerung zur Rechten trifft, wird von dem linken Endpunkte der Grundlinie um die Länge des größten Stückes des ausgespannten Fadens entfernt sein, d. h. um die ganze Länge des Fadens minus der Entfernung des Begegnungspunktes vom nächstgelegenen Endpunkte der Grundlinie (rechter Endpunkt); die Entfernung vom linken Begegnungspunkte bis zum linken Endpunkte der Grundlinie, zu dem größeren Stücke des ausgespannten Fadens addirt, wird also die ganze Länge des Fadens ergeben. Wir sehen somit, daß die Intervalle, welche die Begegnungspunkte von Curve und verlängerter Grundlinie trennt, der gegebenen Summe 2a gleich ist; diese Länge 2a heißt die große Axe der Ellipse, und 2b führt den Namen der kleinen Axe.

§ 193. Wir hätten dies Resultat übrigens auch aus der Beziehung zwischen x und y ableiten können. Sobald nämlich der Scheitel des Dreiecks die Axe der x berührt, reducirt sich die Höhe auf

einen Punkt, und y wird Null. Annulliren wir nun diese Veränderliche in der Gleichung, um zu sehen, welcher Werth von x diesem Stande der Höhe entspricht. Indem y=0 wird, verschwindet das erste Glied der linken Seite der Gleichung, so daß, um den entsprechenden Werth von x zu finden, die Gleichung wird:

$$b^2x^2 = a^2b^2, \text{ woraus}$$

$$x = \pm a \text{ folgt.}$$

§ 194. Das mechanische Verfahren, welches zuvor angewendet wurde, führt zu einer sehr beachtenswerthen Eigenschaft der gezeichneten Curve. Der Faden glitt an dem Bleistifte fort, gleichsam wie an einer Rolle, so daß, obgleich er ungleich getheilt war, er dennoch gleichmäßig nach beiden Seiten gespannt ist, und daß seine beiden Stücke gewissermaßen zwei gleiche Widerstände oder zwei gleiche Kräfte darstellen, deren Richtungen einen gewissen Winkel bilden. Man weiß nun, daß zwei gleiche Kräfte, die in verschiedenen Richtungen wirken, dieselbe Wirkung hervorbringen, wie eine einzige Kraft, welche eine mittlere Lage in dem die beiden Kräfte trennenden Raume einnähme (oder in der Diagonale oder Resultante des durch beide Kräfte gebildeten Parallelogramms angebracht wäre) und mit einer jeden derselben in einem gewissen Verhältnisse von Intensität stände, das wir hier indeß bei Seite lassen wollen, da wir nur mit der Richtung dieser einzigen Kraft es zu thun haben. Es ist außer Zweifel, daß diese Richtung den durch die Richtungen der beiden anderen Kräfte gebildeten Winkel in zwei gleiche Theile zerlegt, weil die Gleichheit dieser beiden Kräfte nicht zuläßt, daß man ihre Resultante der einen mehr als der anderen nähere. Wir können also annehmen, daß in jedem Augenblicke die beiden Stücke des Fadens durch einen einzigen Faden vertreten sind, welcher den Winkel, welchen sie bilden, halbirt. Dieser hypothetische Faden, von einer unaufhörlich sich verändernden Richtung, dessen jedesmaliger Stand immer einen kurzen Augenblick dauert, wird während eines jeden dieser Augenblicke so wirken, wie der Radius eines Kreises, d. h. der an seinem Ende befestigte Bleistift wird während jedes neuen Augenblicks ein kleines Element be-

schreiben, das merklich geradlinicht ist, und zur Richtung des Radius-Fadens senkrecht steht. Die beiden Stücke des wirklichen Fadens, welche mit dem supponirten Faden gleiche Winkel bilden würden, werden folglich gleichmäßig, das eine nach rechts, das andere nach links, gegen das geradlinichte Element geneigt sein, von dem so eben die Rede war. — Es ist wohl nicht mehr nöthig, hier darzuthun, daß, wenn zwei Linien gegen eine gegebene Linie gleiche Neigung haben, sie diese auch gegen die zu der dritten Linie Senkrechte haben werden.

§ 195. Eigenschaften der Ellipse. Nachdem dies Alles festgesetzt, wollen wir annehmen, daß man statt eines jeden der geradlinichten Elemente der Curve eine kleine ebene Fläche setze, und daß man an einen Endpunkt der festen Grundlinie des veränderlichen Dreiecks einen Körper stelle, welcher Licht- oder Wärmestrahlen aussende: da es ein Erfahrungssatz ist, daß die auf eine Ebene geworfenen Strahlen, indem sie daselbst reflectirt werden, einen Winkel bilden, der als Halbirungslinie die im Begegnungspunkte beider Strahlen errichtete Senkrechte hat. Man drückt dies gewöhnlich so aus: der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel; alle Strahlen, welche die kleinen Elementarflächen treffen werden, gehen, nachdem sie auf denselben reflectirt worden, nach dem andern Endpunkte der festen Basis, wo sie sich kreuzen. Man hat dem Punkte, wo die Strahlen sich zu Büscheln vereinigen, den Namen Brennpunkt (focus) gegeben, so wie ebenfalls auch demjenigen, der für alle der Ausgangspunkt sein würde.

§ 196. Der Faden, den wir zu den Elementen der Ellipse senkrecht dachten, heißt die Normale; diese Bezeichnung gilt für jede Linie, die zu einem Elemente der Curve senkrecht ist. Das Element selbst, nach beiden Seiten verlängert, gibt eine gerade Linie, welche man eine Tangente an die Curve nennt.

§ 197. In dem Falle, wo wir nur die beiden Axen einer Ellipse kennen würden, wäre es leicht, ihre Brennpunkte zu bestimmen; diese Punkte sind von dem Ursprunge oder der Mitte der großen Axe um eine durch $\sqrt{a^2 - b^2}$ repräsentirte Länge entfernt, d. h. um eine Länge, welche gleich der Basis eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, das die halbe kleine Axe b zur Höhe, und die halbe große Axe a zur Hypotenuse hat.

§ 198. Die Gleichung eines Kreises, welche die große Axe 2 a zum Durchmesser hat, würde sein

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Alle x würden dieselben sein, wie bei der Ellipse, aber die y würden aus dieser Curve heraustreten, um bis zu dem sie einhüllenden Kreise zu kommen. In welchem Längenverhältnisse würden die y der beiden Linien stehen? Aus der Gleichung des Kreises ziehen wir den Ausdruck:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

aus der Gleichung der Ellipse den anderen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die Division beider Werthe durch einander gibt in Anbetracht der Gleichheit der beiden Faktoren ($\sqrt{a^2 - x^2}$), in denen x dasselbe ist,

$$\frac{\text{y der Ellipse}}{\text{y des Kreises}} = \frac{b}{a},$$

d. h. das y der Ellipse ist zu dem des Kreises beständig in dem Verhältnisse der halben kleinen zur halben großen Axe.

§ 199. Zeichnung der Ellipse. (Zweite Art.) Wir ziehen hieraus ein neues mechanisches Mittel, eine Ellipse zu zeichnen. Man nimmt ein Lineal A C (Fig. 60) von der Länge der halben großen Axe, befestigt auf demselben eine Spitze in dem Punkte B, der so gewählt ist, daß die Länge B C der halben kleinen Axe gleich sei. Man legt das Ende A z. B. auf den negativen Theil der Axe der y, den Punkt B auf die Axe der positiven x, und einen Bleistift an das Ende C. Dann setzt man das Lineal in Bewegung, so daß die Punkte A

und B, in ihrer Bewegung, nicht die Axen verlassen, auf die man sie gelegt hat. Die Curve findet sich durch die Bewegung des Bleistifts gezeichnet.

Es bleibt noch zu zeigen, daß diese Curve eine Ellipse ist. Wenn wir durch den Ursprung eine Linie OD parallel einer der Stellungen des Lineals führen, bis zur Begegnung mit der Verlängerung des durch diese Stellung gegebenen y, so wird diese Parallele eben so lang sein wie AC, d. h. gleich der halben großen Axe, und folglich wird der Punkt D dem Kreise gehören, dessen Radius a ist. Die ähnlichen Dreiecke CBE und DOE geben nun die folgende Proportion:

$$CE : DE = CB : DO \text{ oder}$$
$$= b : a.$$

Wenn also DE ein y des Kreises ist, so muß CE das entsprechende y der Ellipse sein.

§ 200. Wir wollen jetzt eine Seite und die Differenz der beiden andern als gegeben ansehen. Da es unendlich viel Paare von Zahlen gibt, welche dieselbe Differenz haben, so können wir zum Voraus erklären, daß die Zahl der y, also der Elemente der Curve, unendlich sein muß, was in dem vorhergehenden Falle nicht Statt hatte; diese Curve kann also nicht in der Weise wie der Kreis oder die Ellipse geschlossen werden.

Als wir die Summe der Seiten nahmen, mußte sie, damit das Dreieck möglich sei, größer sein als die Grundlinie: jetzt, wo wir die Differenz nehmen, muß sie aus demselben Grunde kleiner sein als die Grundlinie. Stellen wir sie durch 2a dar, so wird die Länge a kleiner sein müssen, als die halbe Grundlinie, oder, wenn man will, die halbe Basis muß die Länge $\sqrt{a^2}$ überschreiten; wir können also diese halbe Basis als durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ ausgedrückt annehmen. Diese Annahme behält noch eine Linie b bei (die man bestimmt, wie im vorhergehenden Falle geschah), welche in der Ellipse eine Axe oder ein Diameter war, aber welche von der neuen Curve nicht berührt werden wird; wir haben, indem wir diese Annahme machen, keinen andern

Zweck, als zwischen dem gegenwärtigen Falle und dem vorangehenden eine möglichst große Analogie herzustellen.

Da die zu machende Rechnung ganz dieselbe ist, wie die für die Ellipse, mit der einzigen Umänderung von $\sqrt{a^2-b^2}$ in $\sqrt{a^2+b^2}$, so beschränken wir uns, ihr Resultat zu geben, nämlich:

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2.$$

§ 201. Da wir in den Zuwachsen von y keine Gränzen annehmen, so wollen wir uns jetzt einmal mit seiner geringsten Größe beschäftigen. Nehmen wir es bis zu einem Punkte reducirt an, wie wir es schon bei der Gleichung der Ellipse gethan haben, so kommen wir noch zu demselben Resultate, $x=a$; was uns lehrt, daß die neue Curve auch die Axe der x in der Entfernung a vom Ursprunge trifft. Es würde übrigens leicht sein, sich sinnlich zu überzeugen, daß, wenn die beiden Fäden, welche die Seiten, deren Differenz man kennt, vorstellen, an einander gesetzt, die Länge der Basis haben (dies tritt ein, sobald die Höhe des Dreiecks y zu einem Punkte reducirt wird), der größere von beiden, um den andern um eine Größe 2a zu übersteigen, gleich der Hälfte dieser um die Länge a vermehrten Basis sein muß. Man kann sich von der Gestalt der Curve eine Vorstellung machen, wenn man denkt, daß in jedem Augenblicke beide Fäden in gleicher Zeit um gleiche Größen wachsen, was die anfängliche Differenz zwischen ihnen bestehen läßt; y wächst alsdann ins Unendliche fort mit x, so daß die Curve sich vom Ursprunge entfernt, indem sie zugleich sich von den beiden Axen entfernt.

§ 202. Hyperbel. Aehnliche Betrachtungen, wie die, welche wir über die Gestaltung der Gleichungen des Kreises und der Ellipse gemacht haben, welche Gestaltung hier ganz ebenso sich wiederfindet, werden uns schließen lassen, daß man aus der jetzt betrachteten Gleichung drei Curventheile herleiten kann, ähnlich denen, welche wir in dem Winkel der positiven x und y betrachteten. Das Ganze aus diesen Theilen wird zwei Arten von großen Bogen bilden, deren Convexität gegen den Ursprung gewendet ist (Fig. 61) und welche beide

symmetrisch durch die Axe der x getheilt sind. Diese Curve heißt eine Hyperbel. Man hat den Namen der Brennpunkte für die Endpunkte der festen Basis beibehalten, d. h. für die auf der Axe der x gelegenen Punkte, welche, der eine nach rechts und der andere nach links, vom Ursprunge in der Entfernung $\sqrt{a^2+b^2}$ liegen.

§ 203. Da diese Art von Curven keine Axen mehr hat, so ist man dahin übereingekommen, sie unter einander mittelst der Länge y, welche sich in dem Brennpunkte erhebt, zu vergleichen, d. h. welche dem Werthe $\sqrt{a^2+b^2}$ von x zugehört. Das Doppelte dieses y heißt der Parameter der Curve. Um ihn zu erhalten, setzen wir statt x in unsere Gleichung $\sqrt{a^2+b^2}$; dann finden wir für das y des Brennpunktes

$$y=\frac{b^2}{a}.$$

Der Ausdruck des Parameters wird folglich sein: $\frac{2b^2}{a}$.

§ 204. Gleichseitige Hyperbel. Nimmt man $b=a$ an, so wird die Gleichung

$$y^2-x^2=-a^2, \text{ woraus}$$
$$x^2-y^2=a^2 \text{ folgt, d. h.}$$
$$(x+y)(x-y)=a^2.$$

Sie drückt eine sogenannte gleichseitige Hyperbel aus.

Die beiden großen Aeste dieser Curve sind, wie wir wissen, symmetrisch durch die Grundlinie des veränderlichen Dreiecks, welche wir die Axe der x genannt haben, getheilt. Lassen wir diese Linie eine Umdrehung von 45 Grad um den Ursprung herum machen, ohne in derselben Art die Scheitel sich ändern zu lassen, so werden diese letzteren mit neuen Höhen y erscheinen, denen neue x zugehören werden, die Gleichung nimmt eine neue Gestalt an und die Curve eine sehr bemerkenswerthe Lage.

§ 205. Es sei OB (Fig. 62) die primitive Stellung der x, OG deren neue Stellung; C sei ein Punkt der Curve. Er gehörte

soeben noch einem y, CB, an, dem ein x, OB, entsprach: jetzt gehört er zu einem y, CE, dem ein neues x, OE, entspricht. Wir wollen das Verhältniß aufsuchen, das zwischen den ersteren x und y und den letzteren besteht, und das augenscheinlich von dem Winkel A abhängt, welchen die beiden nach einander eingenommenen Lagen der x Axe einschließen.

Zunächst ist $CE = CD + DE = CD + BF$ (DB ist parallel OG); da nun der $\angle DCB = A$ (die Schenkel der Winkel sind zu einander senkrecht), so haben wir

$$CD = CB . \sin CBD = CB . \cos A.$$

Wir haben außerdem

$$BF = OB . \sin A,$$

und der Werth von dem neuen y, CE, wird also sein:

$$CE = y . \cos A + x . \sin A.$$

Andererseits ist $OE = OF - EF = OF - DB$ (BF ist parallel CE); nun ist

$$OF = OB . \cos A \text{ und } DB = CB . \sin A,$$

der Werth des neuen x, OE, wird also sein:

$$OE = x . \cos A - y . \sin A.$$

Wir haben den Winkel $A = 45$ Grad angenommen; hierbei ist der cosinus gleich dem sinus, so daß also die obigen Ausdrücke die folgenden werden:

$$CE = (x + y) \sin A,$$
$$OE = (x - y) \sin A.$$

Diese Beziehungen gestatten es, die Faktoren $(x + y)$ und $(x - y)$, welche die linke Seite unserer Gleichung für die gleichseitige Hyperbel bilden, durch neue Faktoren zu ersetzen, welche die neuen x und y enthalten. Wir bekommen dann:

$$\frac{CE . OE}{\sin^2 A} = A^2, \text{ oder } yx = a^2 . \sin^2 A.$$

Bemerken wir noch, daß $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ist (§ 161), woraus bei der Größe von $A = 45^\circ$ die Formel

$$2 \sin^2 A = 1, \text{ also } \sin^2 A = \frac{1}{2} \text{ wird,}$$

so wird die Gleichung schließlich die Form annehmen:

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

§ 206. Asymptoten. Die Curve, welche zuvor die Axe der x traf, begegnet nun keiner von beiden Axen mehr. In der That würde der Werth von x, welcher dem zur Null gewordenen y entspricht, unendlich sein. Diese Axen, welche die Curve nur in einer unendlich großen Entfernung vom Ursprunge treffen würden, nehmen den Namen Asymptoten an. Die Fig. 63 stellt die gleichseitige Hyperbel dar, auf ihre Asymptoten bezogen. Wir werden uns dieser Curve bedienen: zur Auswerthung der Flächeninhalte, zur graphischen Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke und zur Bestimmung der sinus und cosinus der Winkel für einen beliebigen gegebenen Radius.

§ 207. Construction der Hyperbel. Eine beliebige Hyperbel läßt sich vermittelst zweier Reihen concentrischer Kreise construiren, von denen eine jede ihren Mittelpunkt in einem Endpunkte der festen Basis, oder in einem der Brennpunkte hat, und deren eine so mit der anderen coordinirt ist, daß die beiden zu gleicher Zeit angewendeten Kreise beständig denselben Unterschied ihrer Radien zeigen. Wir werden weiterhin von einem neuen Instrumente reden und es beschreiben, das geeignet ist, durch eine ununterbrochene Bewegung alle Curven des zweiten und des dritten Grades zu zeichnen.

§ 208. Wir haben zuvor von einem Mittel, die Hyperbel zu zeichnen, gesprochen, in welchem man zwei Fäden annähme, welche zwischen ihren Längen eine gegebene Differenz hätten, und der eine von einem Brennpunkte, der andere von dem andern ausgehend, an einen Bleistift befestigt wären, der den Scheitel des Dreiecks bildete. Dieser zur Zeichnung der Curve bestimmte Bleistift würde nach der Annahme den Verknüpfungspunkt beider Fäden so fortführen, daß beide in jedem Augenblicke dieselbe Ausdehnung erführen. Man ersieht leicht, daß in diesem Verfahren der dem Bleistifte mitgetheilte

Impuls eine gleiche Anziehung auf beide Fäden ausüben würde, indem er sie zwänge, alle beide um ein und dieselbe Größe zu wachsen; daß folglich die Richtung dieses Impulses, verlängert in dem Winkel der Fäden, auf die er mit einer genauen Gleichheit wirkt, sich nicht dem einen Faden mehr nähern könnte, als dem andern, d. h. daß sie ihren Winkel halbiren würde. Diese hypothetische Linie würde in jedem Augenblicke die Verlängerung eines neuen Elements der Curve, d. h. sie würde eine Tangente sein. Bei der Ellipse war es die Normale, welche den Winkel der beiden Constructionsfäden halbirte. Umgekehrt wird die Normale der Hyperbel, bezüglich der Constructionsfäden, dieselbe Rolle spielen, welche in Bezug darauf bei der Ellipse die Tangente spielte.

§ 209. Da die Construction der gleichseitigen, auf ihre Asymptoten bezogenen, Hyperbel nichts weiter ist, als das Auffinden aller Paare von Größen, zwischen denen sich als mittlere Proportionale eine gegebene Größe findet, so kann sie mittelst einer Verbindung von Winkelmaßen und Linealen geschehen, welche in derselben Ebene arbeiten. Indessen, dieser Mechanismus würde wenig geeignet sein, eine unendliche Menge progressiver Hyperbeln auf denselben Asymptoten zu beschreiben, die so angeordnet sind, daß sie die arithmetischen Operationen, namentlich die Bestimmung der ebenen Flächeninhalte, durch bloße Auftragung nach dem Auge und ohne Kalkül, erleichtern. Da wir eine Anwendung von allgemeinem Nutzen von dieser Curve geben, und den Planimeter, von dem man im Anhange die Beschreibung finden wird, praktisch gebrauchen wollten, so haben wir einfachere mechanische Mittel zu finden gesucht, um die Hyperbel zu beschreiben. Nicht ohne große Schwierigkeiten, und nur mit dem Opfer von sehr viel Zeit, die auf das Studium dieser Construction verwendet ward, und unter der Mitwirkung der hervorragenden Männer der Wissenschaft sind wir zu dem erstrebten Ziele gekommen. Wir lassen hier die Beschreibung des Kampsographen (Zirkel für die Kegelschnitte) folgen, die wir der freundlichen Unterstützung des Herrn Christian verdanken. (Fig. 70.)

T ist der Kopf des Instruments, und fast so gemacht, wie der des gewöhnlichen Zirkels: er besteht aus zwei parallelen Scheiben, zwischen denen ein Stückchen Metall, um sie mit einander zu vereinigen, steht; sie sind durchbohrt, und beide Löcher der Durchbohrung stehen einander gegenüber: ein Pivot a b ist am Kopfe befestigt. Eine Art oblongen Parallelepipedums c d, ausgehöhlt in seiner ganzen Länge und zwei Zapfen tragend, ist zwischen die Scheiben des Kopfes so angebracht, daß die Zapfen in die Löcher der Scheiben greifen. Die Aushöhlung von c d hat eine prismatische Gestalt, — sie wird von einer sehr langen, unbiegsamen Stange traversirt, welche mit Reibung in dem hohlen Körper sich bewegt: eine Schraube v′ hemmt nach Belieben die Winkelbewegung von c d.*) C H ist der Arm des Instruments, den man nach Belieben feststellt, und den wir, im Gegensatze zum andern, den unbehnbaren Arm nennen wollen; er hat in b eine kleine cylindrische Höhlung als Spielraum für das Pivot a b. M N ist der Fuß des Instruments: es ist ein Rechteck, welches durch eine gerade Linie A B in zwei gleiche Theile getheilt ist.**) Ein Halbkreis D D, dessen Ebene senkrecht zu M N steht und mit der geraden Linie A B P zusammenfällt, geht durch den Arm C H. Dieser dreht sich um ein Charnier K L, dessen zu A B senkrechte Axe durch die Ebene des Halbkreises halbirt wird;*** v ist eine Schraube, welche dazu dient, die Stellung des Arms C H zu fixiren.†) An den Endpunkten von F G endlich befestigt man zwei Spatel oder Reißfedern, wenn man die Curven in Tinte ziehen, oder Stahlspitzen, wenn man sie graviren will, rc.

---

*) v′ ist in der Figur nicht recht zu erkennen; es soll wahrscheinlich der rechts von a stehende kleine Buchstabe sein. Anmerk. d. Uebersetzers.

**) In der Figur sind die Buchstaben M und A vertauscht. Da A B Mittellinie sein soll, so muß A die Stelle von M einnehmen. Anmerk. d. Uebersetzers.

***) Der Buchstabe K in der Figur müßte mehr links stehen, da er das Charnier K L bezeichnen soll. Anmerk. d. Uebersetzers.

†) Der Buchstabe v ist nicht in der Figur zu finden. Anmerk. d. Uebersetzers.

Gebrauch des Instruments.

Zu größerer Bequemlichkeit nehmen wir an, daß der Fuß MN auf einer horizontalen Ebene ruhe. Wir geben der CH irgendwelche Stellung, öffnen den ∠ CTG nach Belieben und drehen die Schraube. Nun führen wir FG um CH herum, der Kopf wird dieser Bewegung folgen und sich um sich selbst drehen, und wir werden eine conische Fläche erzeugen. Da aber FG im Sinne der Länge sich fortschieben kann, während sie immer den gleichen Winkel mit CH bildet, so kann man von dieser Leichtigkeit Nutzen ziehen, und die Spitze p beständig die Ebene berühren lassen. Die auf die Ebene gezeichnete Curve wird der Durchschnitt des Kegels durch die Ebene, oder ein Kegelschnitt sein.

Fig. 72 stellt ein anderes Modell des oberen Theiles des Zirkels vor; hier sieht man das in b liegende Pivot nicht mehr, ab ist eine mit dem Kopfe zusammengeschmolzene Stange. Ein Viertelskreis mn, der von cd ausgeht, greift durch eine seitwärtige Oeffnung in ab. Der durch die beiden Arme gebildete Winkel wird durch eine Schraube v′ *) festgestellt.

Die Theorie lehrt, daß dieses Instrument die drei Curven des zweiten Grades beschreiben muß, und darum kann es einigen Nutzen gewähren. Wird es aber eine Curve ergeben, welche bekannten Bedingungen unterworfen ist, die sie bestimmen? Ja, man wird sich alsdann aber keiner Regel bedienen können, sondern zu einem versuchenden Umhertasten seine Zuflucht nehmen müssen. Es wird freilich hierbei eine große Menge von Combinationen geben, die zu ein und demselben Resultate führen, und dies wird die Schwierigkeit des Probirens vermindern.

Es sei TB der feste Arm, TA der bewegliche und dehnbare, welcher die Curve CDA beschrieben hat (Fig. 71). Nimmt man rechtwinkelige Axen oz, ox, oy, deren erste eine durch die Spitze des Kegels gehende Senkrechte sei, so vereinfacht sich die allgemeine Glei-

---

*) v′ ist in der Figur 72 nicht bezeichnet. Anm. d. Uebersetzers.

chung der conischen Fläche, und der Schnitt mit der horizontalen Ebene hat zur Gleichung

$$y^2 + (1 - \varphi^2)x^2 + 2\psi^2 a z' x = z'^2(\psi^2 - 1)^*).$$

Diese Gleichung enthält drei willkürliche Coefficienten. Indem man die Curve durch die Punkte m, n, p führt,**) deren Coordinaten man hat, wird sie vollkommen nach Größe und Lage bestimmt sein.

Die Analyse zeigt, daß wir 24 Kegel finden können, deren Spitzen in der Linie oz und deren Axen in der Ebene zox liegen, und welche alle denselben Kegelschnitt CDA ergeben. Wenn sich jetzt die Linie oz parallel zu sich selbst auf der vertikalen Ebene fortbewegt, so wird der Ursprung O den Platz verändern, und die Gleichung der Curve wird eine andere. Die Coefficienten $(1 - \varphi^2)$ 2c. nehmen neue Werthe, aus denen man auf neue Werthe für a, b, z' schließen kann. Es folgt, daß es eine unendliche Menge von Kegeln gibt, deren Spitzen in der durch die Axe der Curve CDB gehenden Vertikalebene sich befinden, und daß alle Kegel durch ihre Schnitte mit der Vertikalebene diese Curve hervorbringen. Wenn man also die Richtung der Axe einer Curve vom zweiten Grade und drei Punkte dieser Curve kennt, so wird man mit etwas Uebung eine Stellung des Instruments finden können, um diese Curve zu zeichnen: bei der Ellipse genügt es, die beiden Scheitel der großen Axe und einen Scheitel der kleinen zu kennen.

Wir haben weiter oben (§ 206) gesagt, daß wir die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke und zur Bestimmung der sinus und cosinus 2c. für einen jeden gegebenen Radius benutzen würden. Dies geschieht, wie folgt:

Nehmen wir in Fig. 69 an, daß man auf der Tangente an den Kreis in B oder in B' eine Länge BF nehme, sie auf den sinus des Bogens BN trage, und daß man durch den also bestimmten Punkt F' eine gleichseitige Hyperbel ziehe, welche die beiden Katheten des rechten Winkels A zu Asymptoten hat, so wird dieser Ast der Hyperbel die Tangente BF in einem Punkte x treffen, so daß Bx = AH' =

*) Biot, art. 92.

**) Buchstabe p fehlt in der Figur. Anm. d. Uebersetzers.

cosinus des Bogens DN′ ist; denn es ist einleuchtend, daß, wenn wir BF als Radius nehmen, den Bogen DD′ beschreiben, um den Punkt N′ mittelst des verlängerten Radius AN zu erhalten, und von diesem Punkte N′ den Perpendikel N′H′, den sinus des Bogens DN′, fällen, — daß nach dieser Construction (nach der Aehnlichkeit der Dreiecke AHN und AH′N′; nach der Congruenz der Dreiecke ABx und AB′x′; und nach der Gleichung der Hyperbel) AH′ = B′x′ = Bx = dem cosinus desselben Bogens DN′ für einen Radius BF ist.

Nach diesen Grundsätzen haben wir nun einen proportionalen Maßstab der sinus, cosinus, Tangenten ꝛc. für alle Radien construiren können, der ihn zur Construction aller Pläne und Profile geeignet macht, so wie zur graphischen Auflösung der Unbekannten in Dreiecken im Allgemeinen, ohne arithmetische Operationen und ohne Anwendung von Logarithmen. Diese graphischen Mittel kürzen ab und sind von einer großen Einfachheit; sie finden bei'm Aufnehmen von Plänen eine fortwährende Anwendung, um die an Abhängen gemessenen Linien zu reduciren. Ihre genaue Anwendung wird man im Anhange kennen lernen.

§ 210. Indem wir die Prüfung der Curven des zweiten Grades fortsetzen, nehmen wir noch einmal an, daß man zur Construction eines Dreiecks eine dazu ungenügende Anzahl von Bedingungen gegeben habe. Wir betrachten als zu erfüllende Bedingungen:

1°. das Dreieck soll gleichschenkelig sein;

2°. einer der gleichen Schenkel soll einer durch die gegenüber liegende Winkelspitze gehenden Linie parallel bleiben und zu gleicher Zeit beständig nach der Seite der Basis hin (welche zwischen den beiden gleichen Winkeln liegt) durch diejenige Linie begränzt bleiben, welche auf der ersten Linie senkrecht steht, und um die bekannte Entfernung p von der Winkelspitze, durch die sie geht, absteht. Die Länge des einen Schenkels, diesen Bedingungen hinzugefügt, würde das Dreieck vollständig bestimmen. Statt dessen sehen wir noch eine Curve entstehen, in der die Winkelspitzen aller Dreiecke, welche den auferlegten Bedingungen entsprechen, liegen werden.

§ 211. Es sei CDF in Fig. 64 eins der in der gegenwärtigen Frage möglichen Dreiecke. O′F ist die zuvor mit p bezeichnete Länge. Wir legen den Ursprung in die Mitte von O′F, so daß die Axe der y die Basis BF halbiren wird, und daß der Theil der y, welcher zwischen der OH (Axe der x) und der ihr parallelen DC liegt, selbst durch die Basis in demselben Punkte E in gleiche Abschnitte getheilt wird. Uebertragen wir nun wieder auf die Seite DC den Namen der Basis, welchen wir der Seite DF nur gaben, um auf die Gleichheit der beiden ihr anliegenden Winkel aufmerksam zu machen, so wollen wir untersuchen, welches Verhältniß zwischen der Höhe CH oder y und dem Abstande OH oder x ihres Fußpunktes vom Ursprunge Statt findet.

Zunächst erhalten wir, im Dreiecke CFH

$$y^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FH}^2 = \overline{CF}^2 - (OH - OF)^2$$
$$= \overline{CF}^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Andrerseits wissen wir, daß CF = DC ist, und daß diese selbst, welche der Axe der x parallel läuft, gleich OH + OO′ ist, d. h. $= x + \frac{p}{2}$. Wir können also für $\overline{CF}^2$ setzen: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, so daß die Beziehung zwischen y und x die folgende werden wird:

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 2px.$$

§ 212. Parabel. In den vorigen Gleichungen gab es nur Quadrate der Veränderlichen, und dies führte dazu, vier Theile der Curve in der den Ursprung umgebenden vier Winkeln zu construiren. Hier ist das y die einzige Veränderliche, welche sich in der zweiten Potenz zeigt. Daraus folgt, daß, nachdem wir einen Theil der Curve in dem Winkel der positiven x und y construirt haben, wir einen andern nicht anders als in dem Winkel der positiven x und der negativen y construiren können. Dieser zweite Theil wird sich mit dem ersten verbinden und einen großen Bogen ergeben, der seine Convexität gegen die Axe der y, die ihn berührt, wenden wird. Die Form der Gleichung zeigt, daß x und y gleichzeitig bis in's Unendliche hin

wachsen werden, so daß die beiden Enden des Bogens sich bis in's Unendliche verlängern. Eine solche in Fig. 65 dargestellte Curve heißt eine **Parabel**. Ihre Oeffnung werthet man durch einen **Parameter** aus, wie wir zuvor es für die Hyperbel geschehen sahen. Der Parameter ist hier das Doppelte von y, das durch den festen Scheitel des gleichschenkeligen Dreiecks geht, d. h. sich zum Abstande $\frac{p}{2}$ von dem Ursprunge erhebt. Die Substitution von $\frac{p}{2}$ für x ergibt in unserer Gleichung als correspondirenden Werth von y

$$y = p.$$

Der Parameter ist also $= 2p$, d. h. die constante Größe, welche x in der Gleichung der Parabel multiplicirt.

§ 213. Wir können annehmen, daß die gleichen Seiten unsers gleichschenkeligen Dreiecks Fäden seien, welche in jedem Augenblicke um gleiche Stücke wachsen, in dem Maße, wie die Basis DF (Fig. 64) wächst, und daß ferner diese gleiche Verlängerung der Seiten DC, FC durch einen im Scheitel C angebrachten Bleistift bewirkt werde. Es wird klar, daß die Richtung der gezeichneten Elemente beständig den Winkel der beiden Fäden oder des Scheitels halbirt, weil diese Richtung dieselbe ist, wie die der Kraft, welche den Bleistift fortführt, einer Kraft, die auf den einen Faden nicht mehr, als auf den andern wirkt, und sich immer in gleicher Entfernung von beiden befinden muß. Diese hypothetische Linie würde, ganz wie bei der Hyperbel, eine Tangente an die Curve sein. Beachtet man, daß diese Tangente den Mittelpunkt der Seite DF und ebenso zugleich den des Stückes GO von der Axe der y treffen wird, so sieht man, daß, um eine Tangente an einen Punkt einer gegebenen Parabel zu ziehen, man durch die Mitte der y für diesen Punkt eine Parallele mit der Axe der x bis zum Durchschnitte mit der Axe der y ziehen, und dann diesen Schnittpunkt mit dem gegebenen Punkte der Curve verbinden muß.

§ 214. Wir wissen, daß die Linie, welche den Winkel und die gegenüber liegende Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks in gleiche Theile zerlegt, senkrecht zur Grundlinie steht; folglich ist die Tangente

senkrecht zu einer Linie, welche den Punkt, wo sie die Axe der y trifft, mit dem in der Axe der x gelegenen festen Scheitel verbindet. Dieser Scheitel heißt der **Brennpunkt** aus folgendem Grunde. Die beiden Fäden, über C hinaus verlängert gedacht, werden mit dem in diesem Punkte gelegenen Elemente der Curve zwei neue Winkel bilden, welche den diesseits von C gebildeten gleich sind. Denken wir uns nun die linearen Elemente durch kleine ebene Elemente ersetzt, so werden alle Licht- oder Wärmestrahlen, die in der Concavität der Curve parallel zur Axe, d. h. in der Richtung eines unserer Fäden, ankommen, sich nothwendig (wenn sie einen dem Einfallswinkel gleichen Reflexionswinkel gebildet haben) im Punkte F treffen. Sie werden also in ihrem Wege nicht die Richtung des ersten Fadens verlassen können, ohne in die des zweiten zu kommen. Jedermann kennt die Anwendung, welche man von den **parabolischen Spiegeln** macht.

§ 215. Wir bemerken noch, daß der Brennpunkt vom Ursprunge um eine Länge entfernt ist, die dem Viertheile des Parameter oder des constanten Coefficienten von x in der Gleichung der Parabel gleich ist. In derselben Entfernung liegt auf der entgegengesetzten Seite die zur Axe der y parallele Linie O′D, welche den Namen der **Leitlinie** oder **Directrice** führt.

§ 216. **Zeichnung der Parabel.** Da unsere Gleichung uns zeigt, daß y beständig mittlere Proportionale zwischen x und einer constanten Größe (dem Parameter) sein muß, so können wir unsere Curve in folgender Weise zeichnen. Wir denken, daß ein Winkelmaß BOC (Fig. 66) mit seinem Scheitel im Ursprunge, um den es sich drehen kann, liege; dann ein Lineal BAC, das die Axe der y rechtwinkelig schneidet und dessen Punkt A auf dieser Axe fortgleiten kann, ohne daß es diese rechtwinkelige Stellung verliert. Auf diesem Lineale, im Punkte B, der von der Axe der y um die Länge des Parameters absteht, befestigen wir eine Spitze, auf welcher der Arm OB des Winkelmaßes ruhen kann. Der Punkt C, wo der andere Arm

und das Lineal sich treffen, wird ein Punkt der Parabel sein. Denn O A oder y ist die mittlere Proportionale zwischen A B (oder dem Parameter) und A C (oder x). Läßt man nun das Winkelmaß sich beständig auf die Spitze B stützen, während das Lineal sich bewegt, und hält einen Bleistift an den oberen Durchschnitt dieser beiden Instrumente, so wird man die Curve in einer zusammenhängenden Weise zeichnen können.

§ 217. Alle Curven, welche wir besprochen haben (Kreise, Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln), haben wir als Aneinanderfügungen geradlinichter Elemente angesehen, und hierin gleichen alle sich einander. Ihr Unterschied besteht in dem Gesetze, das für eine jede dieser Kurven die Neigung der sie bildenden Elemente gegen die Axe des x bestimmt; so daß die Gleichung, welche dieses Gesetz darstellen würde, ganz eben so gut eine Curve repräsentiren würde, als diejenige, welche die zwischen den y und den x bestehende Beziehung ausdrückt. Wenn wir mittelst der trigonometrischen Tangente diese Neigung der Elemente oder der Tangenten an die Curve ausdrücken, so ist, wie wir sagten, die Tangente an einem Orte der Curve nichts Anderes, als das geradlinichte Element dieses Ortes, nach beiden Seiten verlängert, und wir werden dies Gesetz dargestellt sehen durch das Verhältniß der Zuwachse, welche x und y erfahren, wenn man von dem vorderen Endpunkte eines Elements bis an seinen andern Endpunkt geht. — Dies neue Element kann als Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks angesehen werden, dessen Basis der Zuwachs von x, und dessen Höhe der Zuwachs von y ist. Nun wissen wir, daß die trigonometrische Tangente der Neigung der Hypotenuse gegen die Basis durch das Verhältniß der Höhe zur Basis ausgedrückt ist (§ 165). Wenn also diese Zuwachse, der von y durch dy, und der von x durch dx, dargestellt sind, so wird die Tangente der Neigung durch den Werth des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ dargestellt.

§ 218. Differential-Gleichung des Kreises. Für einen Kreis (Fig. 67) bietet die Neigung der Tangente CD, d. h. der Win-

kel CDX (man nimmt ihn immer nach rechts) dieselbe trigonometrische Tangente, bis auf das Zeichen, wie der ∠ CDO, der sein Supplement ist; und die Tangente dieses letzteren ist die Cotangente des ∠ DOC, der sein Complement ist. In dem Dreiecke COB ist nun diese Cotangente oder die Tangente des ∠ BCO gleich $\frac{OB}{BC} = \frac{x}{y}$. Geben wir dieser Cotangente das Zeichen (—), so wird sie die Tangente des ∠ CDX, und die Differential-Gleichung des Kreises wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

sein. Wir nennen sie eine Differential-Gleichung, weil sie die Bedingung ausdrückt, kraft deren diese Curve ein Kreis ist.

§ 219. Der ∠ COB, den wir so eben betrachteten, ist der Winkel der Normale mit der Axe der x, und seine Tangente wird durch $\frac{y}{x}$ dargestellt sein. Vergleichen wir sie der vorhergehenden, so sehen wir, daß sie sich nur durch das Zeichen und durch die Umkehrung unterscheidet. Dies Verhältniß zwischen den Neigungen dieser beiden Linien hat beständig Statt.

§ 220. Differential-Gleichung der Parabel. In der Parabel (Fig. 68) ist die Neigung der Tangente gegen die Axe der x gleich dem Winkel an der Spitze des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse dem gleichschenkeligen Dreiecke als Basis dient. Dieser Winkel nun hat als Tangente $\frac{p}{y}$; die Differential-Gleichung der Parabel wird also $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ sein. Sehen wir darin $\frac{dy}{dx}$ als eine einfache Veränderliche z an, so wird diese Gleichung zu

$$zy = p$$

und kann einer gleichseitigen Hyperbel, welche die tangentiale Curve der Parabel sein wird, ihre Entstehung geben. Man würde auch die tangentiale Curve dieser Hyperbel suchen können; es wäre die tangentiale Curve der zweiten Ordnung der Parabel, oder ihre

Differential-Gleichung der zweiten Ordnung. Man sieht, daß man auf diesem Wege eine Reihe von Curven erhalten würde, welche dergestalt mit einander verknüpft sind, daß die Kenntniß der einen die aller andern nach sich zieht.

§ 221. Jede Frage, von welcher Natur sie sei, welche zwei Veränderliche hat, läßt, wenn man die zwischen dieser Veränderlichen bestehende Beziehung aufsucht, eine Gleichung zwischen x und y entstehen, die man als die einer Curve ansehen kann, welche ihre tangentiale Curve oder ihre Differential-Gleichung haben muß. Diese letztere zeigt, wie wir sahen, das Verhältniß des sehr kleinen Zuwachses einer der Veränderlichen zum zugehörigen Zuwachse der andern Veränderlichen. Es ist nun oft viel leichter, unmittelbar dies letzte Verhältniß zu finden, als von vorn herein zu der gewöhnlichen oder algebraischen Gleichung zwischen x und y zu gelangen. Würden wir nun eine Tabelle der Zugehörigkeit (Correspondenz) der verschiedenen Formen einfacher Beziehungen von x zu y, und der Differential-Gleichungen dieser Formen aufstellen können (sobald es bequemer schiene, durch diese letzteren zu gehen), so würde man es thun, ohne deshalb im Mindesten sich vom Ziele zu entfernen, da die Kenntniß der Einen zu der der Anderen führen würde. — Um kurz diese Tabelle aufzustellen, suchen wir den Zuwachs, den y erfährt, sobald x um dx wächst, was uns dy als Funktion von dx gibt, und uns gestattet, das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ zu bilden. Wir erhalten dy, indem wir zuerst das ganze y wachsen lassen, und dann das subtrahiren, was es vor seinem Wachsen war.

§ 222. 1°. Die Form $y = x \pm a$ gibt die Gleichung

$$y + dy = x + \pm a,$$

welche durch Subtraction des ersten Werthes von y uns zu $dy = dx$ führt. Dies ist die Differential-Gleichung aller geraden Linien, welche mit der Axe der x einen Winkel von 45 Graden bilden. Der Ausdruck der Tangente lehrt es uns ebenfalls, da er $\frac{dy}{dx} = 1$ ist, und

es nur für eine Neigung von 45 Graden Statt findet, daß die Tangente des Winkels dem Radius gleich ist.

§ 223. 2°. Die Form

$$y = a x$$

gibt, wenn man verfährt, wie oben,

$$y + dy = a(x + dx) = a x + a dx,$$

dann weiter $dy = a dx$: dies ist die Differential-Gleichung aller geraden Linien, welche durch den Ursprung gehen und für welche die Tangente der Neigung a ist. Die Differential-Gleichung ergibt auch

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Wäre die gegebene Gleichung

$$y = a x \pm b$$

gewesen, so würde die Differential-Gleichung dieselbe geblieben sein, was beweist, daß sie zu gleicher Zeit allen Linien derselben Neigung entspricht, welche nicht durch den Ursprung gehen.

§ 224. 3°. Nehmen wir die Form

$$y = \log x,$$

welche die Curve darstellt, deren y die Logarithmen von x sind, und die man eine logarithmische Curve nennt, so wird der Zuwachs der y die Differenz zwischen zwei auf einander folgenden Logarithmen sein, und der Zuwachs der x die Differenz zwischen den zugehörigen Zahlen (numeri). Nehmen wir die beiden ersten Glieder b und b′ der von den Logarithmen gebildeten arithmetischen Progression als bekannt an, da bei diesen Progressionen zwei beliebige auf einander folgende Glieder dieselbe Differenz haben, so erhalten wir $dy = b' - b$. Kennen wir nun ebenso die beiden ersten Glieder a und a′ der von den zu den Logarithmen gehörigen Zahlen (numeri) gebildeten geometrischen Progression, da der Quotient zweier auf einander folgender Glieder in dieser Art der Progression beständig derselbe ist, so haben wir

$$\frac{x + dx}{x} = \frac{a'}{a},$$

woraus wir

$$dx = (a' - a) . \frac{x}{a}$$

bilden. Das Verhältniß von dy zu dx wird also sein:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b' - b}{a' - a} . \frac{a}{x}.$$

Gewöhnlich nimmt man an, daß das erste Glied der arithmetischen Progression b gleich Null ist, und daß das der geometrischen $a = 1$ ist; man nimmt ferner an, daß das zweite Glied der ersten, b', gleich sei der Differenz der beiden ersten Glieder der zweiten Progression $(a' - 1)$, was das oben gegebene Verhältniß auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

zurückführt. Sieht man $\frac{dy}{dx}$ als eine einfache Veränderliche an, so erkennt man in dieser Differential-Gleichung der logarithmischen Curve die natürliche Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel. Eine ähnliche Bemerkung zeigte sich bereits bei Gelegenheit der Parabel.

Die Basis des Logarithmensystems, das aus den vorangehenden Suppositionen sich ergeben würde, wäre 2,7182818.... Man nennt diese Logarithmen hyperbolische (oder natürliche).

§ 225. 4°. Die Form $y = x^a$ läßt sich leicht auf die vorige zurückführen. Die Logarithmen der beiden Zahlen sind gleich: mithin ist

$$\log y = \log (x^a) = a . \log x.$$

[Der Logarithmus der fünften Potenz einer Zahl z. B. ist, wie wir wissen, gleich fünfmal dem Logarithmus dieser Zahl.]

So eben führte uns die Gleichung

$$y = \log x$$

zu $dy = \frac{dx}{x}$; eine Gleichung $z = \log y$ würde uns zu $dz = \frac{dy}{y}$, und die Gleichung $z = a \log x$ zu $dz = \frac{a . dx}{x}$ führen. Die Gleichung og $y = a . \log x$ führt daher zu $\frac{dy}{y} = \frac{a\,dx}{x}$, weiter zu

$$dy = a \cdot \frac{y}{x} dx = x \cdot \frac{x^a}{x} \cdot dx$$

$$= a \cdot x^{a-1} \cdot dx,$$ und endlich

zu
$$\frac{dy}{dx} = a \cdot x^{a-1}.$$

§ 226. 5°. Die Form $y = \frac{a}{x}$ knüpft sich an die vorhergehende, wenn man sie also schreibt

$$y = a \cdot x^{-1}.$$

Man hat dann

$$\frac{dy}{dx} = -a \cdot x^{-2},$$

oder $\left(-\frac{a}{x^2}\right)$, oder auch $\left(-\frac{y}{x}\right)$.

§ 227. Die Form $xy = a$, welche der gleichseitigen Hyperbel angehört, ist eine Abart von $y = \frac{a}{x}$. Ihre Differential-Gleichung zeigt sich zuweilen in der Form

$$x dy + y dx = o.$$

Die Form $\frac{y}{x} = a$ schließt sich auch an eine der schon betrachteten Formeln, nämlich $y = ax$. Ihre Differential-Gleichung kann sich unter der Form

$$y dx - x dy = o$$

präsentiren.

§ 228. 6°. Die Form $x = a^y$ läßt sich sofort in

$$\log x = y \cdot \log a$$

umwandeln, wenn man die Logarithmen beider Seiten nimmt; ihre Differential-Gleichung wird sein

$$dy = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{dx}{x}$$

und in dem Falle, wo a die Basis des Systems wäre

$$dy = \frac{dx}{x}, \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Haben wir $y = a^x$, so wird die Differential-Gleichung sich unter folgender Form zeigen

$$dy = y\,dx = a^x . dx, \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x.$$

Die tangentiale Curve würde der natürlichen Curve gleich werden.

§ 229. Wir wollen diese Untersuchung nicht weiter treiben, dagegen aber einige Anwendungen der besprochenen Verfahrungsweisen auf die Gleichungen der Curven machen.

§ 230. Die Gleichung des Kreises gibt uns

$$y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Form fällt unter $y = x^a$.

Wir wissen nun, daß in diesem Falle die erste Seite der Differential-Gleichung dy ist, die andere Seite einen ersten Faktor hat, welcher das zweite Glied der natürlichen Gleichung, deren Exponent um Eins vermindert wurde, ist, und welche man ferner mit dem ganzen Exponenten multiplicirt hat, — dann einen zweiten Faktor, welcher den Zuwachs der zur Potenz a erhobenen veränderlichen Größe vorstellt. Wir haben also

$$dy = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} . d(r^2 - x^2)$$

$$= \frac{d(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2(r^2 - x^2)}$$

[Wir sehen hierbei $(-r^2 x^2)$ als eine einfache Veränderliche an.] Es ist aber $d(r^2 - x^2) = -2x . dx$. Uebertragen wir diesen Werth, und setzen y für den Faktor $(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ des Nenners, wozu die natürliche Gleichung uns berechtigt, so wird das schließliche Resultat

$$dy = -\frac{2x . dx}{2y}, \text{ oder } y . dy + x . dx = o.$$

Dies ist dasselbe Resultat, welches wir auf geometrischem Wege gefunden hatten.

§ 231. Eine ähnliche Operation würde uns als Differential-Gleichung der Ellipse

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B^2x}{A^2y}$$

ergeben.

§ 232. Die der Hyperbel ist, mit dem einzigen Unterschiede des Zeichens, dieselbe.

§ 233. Wollen wir die der Parabel finden, so beachten wir, daß ihre natürliche Gleichung

$$y^2 = 2px$$

unter folgende Form sich bringen läßt:

$$x = \frac{1}{2p} \cdot y^2.$$

Sie gehört alsdann unter die allgemeine Form von $y = x^a$, und wir bekommen:

$$dx = \frac{2y \cdot dy}{2p}, \text{ dann}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Zu ganz derselben Gleichung waren wir durch geometrische Anschauungen gekommen.

§ 234. Da eine Curve, deren Krümmung eine einige ist, ein horizontales Element hat, sobald sie zu steigen aufhört und abzusteigen beginnt, oder umgekehrt, d. h. sobald ihr y das größte oder das kleinste Mögliche ist, — da folglich in diesem Falle die Neigung gegen die Axe der x Null, die trigonometrische Tangente also ebenfalls Null wird, — so können wir, wenn wir die durch eine beliebige Frage der Physik etwa mit zwei Veränderlichen gegebene tangentiale Curve kennen, untersuchen, welches die Werthe der Veränderlichen x seien, die, indem sie den Ausdruck für die Tangente zu Null machen, den Maximal- und Minimal-Werthen von y entsprechen.

In der tangentialen Gleichung des Kreises z. B.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

wird durch $x = o$ die zweite Seite der Gleichung annullirt. Dem Werthe $x = o$ entsprechen also die Maximal-Werthe von y. Wir wissen wirklich, daß für diesen Werth von x allein y dem Radius gleich ist, während für alle andern es kleiner als der Radius ist.

§ 235. Wir müssen hier einige Worte über einen bemerkenswerthen Vortheil sagen, den man aus der Betrachtung der tangentialen Curven zieht. Eine Curve ist gegeben; man will die zwischen ihr, der Axe der x und einem gewissen y liegende Fläche kennen. Diese Fläche ist ein Compositum kleiner Rechtecke, deren Höhen alle auf einander folgende y der Curve sind, und deren sämmtliche Grundlinien gleich dem Zuwachse dx sind, den die x in jedem Augenblicke erfährt. Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung (wir bezeichnen hiermit eine beliebige Form, eine beliebige Function von x), so wird jedes Element der gesuchten Fläche ausgedrückt sein durch

$$f(x)\,dx = dy.$$

[Dieses dy, Zuwachs der Fläche, ist nicht mehr der Zuwachs des früheren y, das linear war.] Diese Gleichung nun, unter die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

gebracht, ist nichts Anderes als die gegebene Gleichung, angesehen als zu einer tangentialen Curve gehörig. Sobald wir also die zwischen einer Curve und der Axe der x liegende Fläche finden wollen, finden wir sie in dem y einer andern Curve ausgedrückt, für welche diese die tangentiale Curve sein würde.

§ 236. Will man z. B. die Fläche kennen lernen, welche zwischen der Parabel $y = \frac{x^2}{p}$, der Axe der x und einem gewissen später zu bestimmenden y liegt, so sieht man $\frac{x^2}{p}$ als einen Tangenten-Aus-

druck an. Er gehört zu der Gleichung $y = \frac{x^3}{3p}$, die unter die Form $y = x^a$ zurückkehrt. Es stellt also $\frac{x^3}{3p}$ die gesuchte Fläche dar. Setzt man in diesem Ausdrucke y für $\frac{x^2}{p}$, was man nach der gegebenen Gleichung thun darf, so nimmt er die neue Form $\frac{xy}{3}$ an; — die gesuchte Fläche ist also der dritte Theil des Produktes von y mal dem zugehörigen x.

§ **237.** Wir wollen nun diese Einleitung schließen, indem wir zeigen, wie man noch, mittelst der tangentialen Curven, die Länge jeder beliebigen Curve auswerthen kann. Jedes geradlinichte Element einer Curve, die man als Hypotenuse eines Dreiecks ansieht, dessen Basis der Zuwachs für x, und durch $\frac{dx}{\cos A}$ dargestellt ist (wir nennen A die Neigung des in Rede stehenden Elements gegen die Axe der x); es ist nun $\frac{1}{\cos A} = \sec A$, und ferner $\sec A = (\text{tang}^2 A + 1)^{\frac{1}{2}}$. Der obige Ausdruck wird also

$$dx(\text{tang}^2 A + 1)^{\frac{1}{2}},$$

und wenn man darin die Tangente durch ihren Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ ersetzt,

$$dx\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Bezeichnen wir durch dy dies Element, dessen Länge wir so eben ausdrückten [dieses dy ist also ganz etwas anderes, als das, welches in dem Ausdrucke der Tangente vorkommt], so erhalten wir die Differential-Gleichung

$$\frac{dy'}{dx} = \left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}},$$

welche, mit Hülfe der Tabelle, die wir von den tangentialen Curven und den correspondirenden natürlichen gebildet haben werden, zu einer algebraischen Gleichung führen wird, deren y die Länge der Curve, welche man finden wollte, ausdrücken wird.

Anhang.

Der französische Olarithmus oder der Laur'sche Planimeter.

(Allgemeiner graphischer Calculateur und Constructeur.)

Vorwort.

§ 1. Der Olarithmus ist, seit 1810, durch das Bedürfniß hervorgerufen, die Ausführung des allgemeinen Katasters und des Parzellirens, und in Folge dessen alle geodätischen und graphischen, darauf bezüglichen, Operationen zu vereinfachen und zu beschleunigen. Das Hauptverdienst einer Erfindung wird nach dem Nutzen beurtheilt, den sie den Wissenschaften und Künsten bringt. Der Nutzen unsers Instruments ist seit etwa 40 Jahren constatirt, nicht bloß durch die wichtigen Ersparungen, welche seine Anwendung sowohl in Frankreich, als außerhalb desselben, möglich gemacht hat, sondern auch durch die Aufmunterungen, welche der Erfinder fortwährend von seinen zahlreichen Subscribenten, und besonders durch die höchste wissenschaftliche Corporation Frankreichs, das Institut, erfahren hat.

§ 2. Der Olarithmus gründet sich zum Theil auf eine Eigenschaft der gleichseitigen, auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel, zum Theil auf die Theorie der proportionalen Linien und der ähnlichen Dreiecke. Er besteht aus verschiedenen Zubehören (siehe Tafel V). Das Hauptsächlichste ist ein in halbe Grade getheilter Transporteur auf einer rechteckigen durchscheinenden Hornplatte, auf deren Oberfläche man Hyperbeln zwischen zwei Asymptoten gezeichnet hat, die den

beiden Seiten des Rechtecks parallel sind. Auf diesen selben Hyperbeln findet man eine Reihe von proportionalen Linien, die ebenfalls den beiden Asymptoten parallel sind. Das durchscheinende Rechteck bewegt sich mittelst zweier Rollen, welche ein in gleiche Theile getheiltes und eine der Seiten des Rechtecks bildendes Lineal trägt, parallel mit einer seiner Seiten. Mit Hülfe dieses Ganzen von Linien erreicht man, durch Auflegen oder durch bloße Ansicht, und ohne arithmetische Operationen, einerseits die geometrische Construction der Ebenen, und andererseits die Umformung der Polygone zu gleichen Dreiecken oder Vierecken, und das Maß ihrer Oberfläche.

Anwendung des Olarithmus zur Auffindung des Flächeninhalts ebener Figuren.

1. Artikel.

§ 3. Man weiß, daß jedes Polygon in ein ihm gleiches Dreieck umgeformt werden kann (§ 135), und daß, nach einer sehr bekannten Eigenschaft der gleichseitigen, auf ihre Asymptoten bezogenen, Hyperbel, jedes Dreieck, welches zur Grundlinie die Abscisse eines Punktes, und zur Höhe die Ordinate dieses selben Punktes hat, eine vollkommen bestimmte Oberfläche hat. Nach dem einfachen Aussprechen dieser Grundsätze begreift man den Nutzen unsers Instruments, um den Flächeninhalt eines Terrains zu messen, dessen Plan man hat, oder von dem man doch wenigstens die zu seiner Construction nöthigen Daten kennt.

§ 4. Die Construction des Olarithmus bestand also vorzüglich in der genauen Zeichnung (zwischen zwei rechtwinkeligen Asymptoten und für alle gewollten Proportionen) einer genügenden Zahl von Hyperbeln, die die Vielfachen zweier beliebiger linearen Faktoren sind, und in der Anfügung eines einfachen Mechanismus, der die Parallelität erleichtert, welche zur Umformung irgend eines Polygons in ein gleiches Dreieck nöthig ist. Die rechteckige Platte, im Vereine mit

dem Lineal auf beweglichen Rollen, erfüllt vollkommen die verlangten Bedingungen, wie man dies bei seiner Anwendung auf die Reduction desselben Pentagons in Fig. 43 bis, Tafel III sehen wird.

§ 5. Man nehme das Instrument in die linke Hand und einen scharf zugespitzten Bleistift oder eine feine Stahlspitze in die rechte Hand, und nachdem man mit dem Bleistifte oder der Stahlspitze die Verlängerung nach rechts und nach links einer der Seiten des Pentagons, der Seite CD, gezeichnet hat, halte man die Stahlspitze fest auf den Winkel D; lege sodann die Basis MN der Platte des Instruments gegen die Stahlspitze, damit diese Basis, um die Spitze pivotirend (ohne Herumtasten), auf die Diagonale DA des Fünfecks gerichtet sei; gebe darauf dem ganzen Instrumente die durch seine beweglichen Rollen vorgezeichnete parallele Bewegung, indem man auf die Axe drückt, bis die Basis an den gegenüber liegenden Winkel E kommt, und bestimme einen Punkt G in der verlängerten Seite CD; ziehe endlich die Diagonale GA, welche das Dreieck ADG = ADE bestimmen wird. Es ist klar, daß, wenn man mit dem Dreiecke ACB des Pentagons so verfährt, wie dies eben mit Dreieck ADE geschah, man zur Linie AF kommen muß, welche dies Dreieck in sein ihm gleiches ACF umformt. Diese doppelte Operation wird also das gegebene Fünfeck in das ihm gleiche Dreieck GAF umformen.

§ 6. Man könnte das Pentagon umwandeln, indem man mit nur Einer Seite operirte; aber dies Mittel würde ein Dreieck ergeben, dessen Höhe und Grundlinie zu sehr im Mißverhältnisse gegen einander ständen, als daß man den Olarithmus mit allem davon zu erwartenden Vortheile anwenden sollte. Darum haben wir die Umformung dieses Polygons theils nach rechts und theils nach links geschehen lassen. Man muß beständig auf die größtmögliche Regelmäßigkeit hinzielen, durch wohl angeordnete und nicht gedehnte Schnitte von der Basis des Instruments auf die Basis der Umformung, und zu dem Ende vorzugsweise die genannte Basis nehmen, welche rechtwinkelig, oder doch beinahe so, der größten Höhe oder Diagonale des umzuformenden Polygons gegenüber liegt, und sodann

theils nach rechts und theils nach links von der angenommenen Basis operiren. Wenn man endlich nicht die zu spitzen Winkel bei dieser Reducirung vermeiden kann, so beschränkt man sich auf die Umformung in ein Viereck, dessen Flächeninhalt man gleichfalls durch den Olarithmus erhalten kann, indem man eine der Diagonalen als Abscisse ansieht, und die Summe der Höhen beider gegenüber liegenden Dreiecke als die Ordinate des zugehörigen Punktes.

§ 7. Wir wollen mittelst des Olarithmus die Fläche eines gegebenen Dreiecks ABC (Tafel V) suchen. Es ist klar, daß, wenn das Instrument auf dies Dreieck so gelegt wird, daß Punkt A auf eine der Asymptoten fällt, und Punkt C auf die andere, während gleichzeitig die Basis AB den Abscissen der Hyperbel parallel sein wird, der Scheitel B nothwendiger Weise der gemeinsame Punkt der Curve sein muß, die ein Produkt der Basis mal der Höhe des Dreiecks ist. In diesem Zustande, wenn der Punkt, welcher der Abscisse und der Ordinate der vielfachen Hyperbel gemeinsam ist, auf eine der auf der Platte beschriebenen Hyperbeln fällt, so wird die Zahl dieser Curve (ihre Hälfte, wenn es sich um das Dreieck handelt) die Fläche des Dreiecks in einer runden Zahl von Hundertern oder von Zehnern von Quadratmetern, je nach der Größe des Maßstabes des zu berechnenden Plans, angeben. Wenn hingegen der gemeinsame Punkt sich in dem weißen Raume zwischen zwei Curven befindet, so wird die Fläche durch eine gebrochene Zahl ausgedrückt werden, und man wird diesen Bruch annähernd in Zehnteln ausdrücken, wie man es für die Zehntel der Einheiten gewöhnlicher Maßstäbe thut. In diesem Dreiecke also, wo man sieht, daß der Punkt oder Scheitel B zwischen die beiden Hyperbeln N°. 80 und 90, aber näher an 90 als an 80 fällt, wird jeder geübte Geometer leicht erkennen, daß die Fläche des Dreiecks ABC sehr nahe an $\frac{86}{2} = 43$ liegt, und daß, wenn die Quadrateinheit, welche durch die Nummern der beschriebenen Hyperbeln ausgedrückt wird, die Are z. B. ist (ein französisches Flächenmaß, welches hundert Quadratmeter hat), der Flächeninhalt dieses Dreiecks ungefähr = 43 Aren ist.

§ 8. Wir suchen noch mit unserem Instrumente den Flächeninhalt eines Vierseits ABCD, das gleichfalls unter die durchscheinende Platte dergestalt gebracht ist, daß die Diagonale AB und die Summe der Höhen beider Dreiecke Functionen der Abscissen und der Ordinaten der beschriebenen Hyperbeln sind. Es leuchtet ein, daß Punkt x, der sich in gleicher Höhe mit dem Scheitel D des Vierseits befindet, senkrecht zum Scheitel B, die Curve bezeichnet, welche die Vielfache der Abscisse AB mal der Ordinate Sx ist, und daß die Stellung dieses Punktes x zwischen den beiden Hyperbeln N°. 140 und 150 einen Flächeninhalt von $\frac{145}{2} = 72,\ 50$, d. h. 72 Aren und 50 Centiaren, bedeutet.

Von dem Olarithmus, als graphischer Constructeur betrachtet.

2. Artikel.

§ 9. Jeder praktisch Geübte, der an die Aufnahme und Zeichnung von Plänen gewöhnt ist, wird sofort einsehen, welchen Nutzen unser Instrument bei der Construction der Pläne gewährt, in Anbetracht der Größe des Radius des in halbe Grade getheilten Transporteurs, den die Platte in Verbindung mit dem schrägkantigen Maßstabe enthält, — und welche Leichtigkeit man hat, mit Genauigkeit die Oeffnung der Winkel und die Richtung der Seiten oder Linien, die man auf dem Terrain beobachtet hat, mittelst der sinus und cosinus (die man zugleich abliest) nach zwei rechtwinkeligen Axen bestimmen und auf Plänen verzeichnen zu können, wie man es für das Verhältniß der Abstände zum Meridian und zur Senkrechten eines gegebenen Ortes für die beobachteten Punkte thut, die ein trigonometrisches Netz bilden. Die Leser und die für die geodätische Kunst speciell sich Interessirenden, welche die zahlreichen Anwendungen kennen lernen und darin eingeweiht werden wollen, deren dies Instrument fähig ist, werden gut thun, den zweiten Band zu Rathe zu ziehen, der speciell für die allgemeinen praktischen Anwendungen bestimmt ist.

Anwendung des Olarithmus zur Bestimmung der natürlichen sinus und cosinus, oder zur Bestimmung der Unbekannten des rechtwinkeligen Dreiecks, im Allgemeinen um methodisch zur Reduction der Linien mit Rücksicht auf die Abhänge vorzugehen, und zu den Beziehungen der Längen- und Querprofile bei Nivellements u. s. w.

3. Artikel.

§ 10. Wir wollen annehmen, daß man ein verschiedentlich gegen den Horizont geneigtes, durch die gebrochene Linie ABCDEF (Fig. 73, Tafel IV) bezeichnetes Terrain messen oder nivelliren und ein geometrisches Längenprofil davon construiren wolle. Man durchgeht das Terrain in seiner ganzen äußeren Entwickelung, um mit dem Theodoliten mit Zenithalkreis und einem Distanz- oder Latten-Fernrohre, oder mit jedem andern Instrumente die Neigung zum Horizonte und die partielle Länge jeder Unebenheit des Terrains zu messen, und beginnt mit dem ersten Stücke AB, das wir zu 75 Meter auf einer Böschung (einem Abhange) von 35 Grad gemessen annehmen wollen. Um, mit diesen einzigen Daten, den Höhenunterschied des Punktes A gegen den Punkt B und die horizontale Projection der Böschung AB gegen die horizontale Ebene AB′ kennen zu lernen, muß man berechnen oder graphisch bestimmen die Unbekannten des rechtwinkeligen Dreiecks AB′B, in welchem die drei Winkel und die Hypotenuse bekannt sind. Die Horizontalprojection AB′ der Böschung AB ist gleich dem cosinus des ∠ BAB′, und die Höhe von B über A, oder BB′ ist gleich dem sinus desselben Neigungswinkels für denselben gemessenen Radius AB. Der Olarithmus gibt uns diese doppelte Lösung ohne arithmetische Operationen, wie folgt:

§ 11. Man nehme zuerst auf der Tangente, die auf der Platte durch die erste Linie PQ dargestellt ist, welche man in eine vertikale Lage bringt, die der N°. 75 entsprechende Horizontale und folge ihrer Richtung:

1°. bis zur Begegnung der Vertikale N°. 35°, was zwischen den Hyperbeln N°. 61 u. 62 Statt hat, aber näher an N°. 61, wonach man durch das Auge erkennt, daß die horizontale Projektion dieser Böschung sehr nahe an 61 Mètres, 4 Décimètres liegt;

2°. bis zur Begegnung der Vertikale, die mit N°. 55°, dem Complementwinkel von 35° in dem rechtwinkeligen Dreiecke ABB′, bezeichnet ist. Sie hat Statt auf der Curve N°. 43, woraus zu schließen ist, daß die Höhe des Punktes B über dem Horizonte des Punktes A 43 Mètres beträgt.

§ 12. Indem man auf dieselbe Weise mit den rechtwinkeligen Dreiecken BC′C, DC″C, DGE und FE′E nach einander verfährt, findet man:

1°. daß die horizontale Projektion von BC = 82^{m}, 7 und der Niveau-Unterschied von B und C = 30^{m}, 1 beträgt, welche Differenz, zu der des Punktes B gegen A addirt, der von C gegen A 73^{m}, 1 gibt;*)

2°. daß die Horizontal-Projektion des Abhanges CD = 49^{m}, 8 ist, und die Höhe des Punktes C über dem Horizonte D 44^{m}, 8 beträgt, welche Höhe, von der des Punktes C über A abgerechnet, als Höhe von D über dem Horizonte des Punktes A 28^{m}, 3 läßt;

3°. daß die Horizontal-Projektion der Böschung DE = 54^{m}, 1, und die Höhe von E über dem Horizonte AE′ = 42^{m}, 8.

4°. endlich, daß die Horizontal-Projektion des Abhanges EF = 86^{m},6 ist, und Punkt F um 7^{m},2 unter dem Horizonte des Punktes A liegt.

Die ganze Summe der verschiedenen Horizontal-Projektionen des durchmessenen Terrains ergibt AF′ = 334^{m}, 6 für die Reduction der gebrochenen und verschiedentlich geneigten Linie ABCDEF auf den Horizont, während diese Linie selbst eine Länge von 386 Mètres hat.

*) 82^{m}, 7 bedeutet 82 Mètres und 7 Décimètres. Anmerk. d. Uebersetzers.

Ueber das Nivellement von Theilen der Erdoberfläche im Allgemeinen.

4. Artikel.

Erklärung.

§. 13. Die ebene Fläche, sagten wir, ist, für die geometrische Sprachweise, diejenige, mit welcher eine gerade Linie in allen ihren Punkten zusammenfallen kann: Die Linie und die Fläche nun können im Raume alle beliebigen Richtungen und Neigungen annehmen. Es werden daher immer mindestens zwei feste Punkte durchaus nöthig sein, um die wahre Lage und Richtung (ob schräg oder horizontal) einer geraden Linie bestimmen zu können; und man bedarf wenigstens dreier fester Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, um die Lage und Richtung (ob schräg oder horizontal) einer Ebene zu bestimmen. Es kann demnach keine Schwierigkeit haben, auf dem Felde die gerade Linie oder die Ebene zu construiren oder zu traciren, sobald man ihre Richtung oder ihren Neigungswinkel kennt und die Größe der Abstiche und Aufschüttungen, welche zu bewirken sind, um sie zugänglich und vollkommen gleichförmig zu machen. Aus dem Artikel 3 des vorangehenden Anhangs, pag. 193, ist nun ersichtlich, daß wellenförmige und wechselvolle Flächen auf dem Terrain in beliebig viele Dreiecke und Vierecke sich zerlegen lassen, und auf der Grundfläche durch ihre Horizontal-Projektion in eine gleiche Anzahl von entsprechenden Dreiecken und Vierecken, die eine gleiche Zahl prismatischer Zellen (siehe pag. 66—76) begreifen. Demzufolge können wir mit Richtigkeit die Form und den Inhalt der genannten Prismen und ihre inneren und äußeren Seitenflächen construiren und gleichzeitig berechnen; denn wir können auf der Oberfläche eines beliebigen gegebenen wellenförmigen und wechselnden Terrains, oder auf der horizontalen Grundfläche in einer gegebenen oder vorausgesetzten Tiefe die Basis der genannten Prismen zeichnen oder traciren, welche mit den äußeren, verschiedenartig geneigten Flächen correspondiren, so wie ihre mittlere Axe auf dem Boden einer

Wasserrinne, eines Canals, eines Weges, überhaupt einer beliebigen ebenen Fläche, und zwar vermittelst der den Krümmungen und Wendungen der genannten ebenen äußeren Durchschnitte entsprechenden Ordinaten (siehe pag. 76).

Auf einer geneigten oder horizontalen Ebene, den vertikalen Durchschnitt, nach Länge und Breite, einer unebenen und gekrümmten Erdfläche durch die den Krümmungen entsprechenden Ordinaten zeichnen, — oder an der Oberfläche, oder auf der Grundfläche, durch dieselben Ordinaten die Richtung einer geneigten oder horizontalen Ebene bestimmen, heißt also ein und dieselbe Operation vornehmen, nämlich das geometrische Profil, nach Länge und Breite, einer zu nivellirenden Fläche zeichnen, und die allen ihren Krümmungen entsprechenden Ordinaten bestimmen.

§ 14. Nach dieser allgemeinen Vorbemerkung können wir sagen, daß das Nivellement eine geodätische Operation ist, welche die Aufgabe hat, die Ordinaten einer gewissen Zahl vereinter Prismen aufzufinden, die die Degression (tiefere Lage) oder die Elevation (höhere Lage) der Krümmungen terrestrischer Flächen unterhalb oder oberhalb einer beliebigen gegebenen Ebene angeben. Es folgt hieraus, daß die Construction der Ebenen en relief in der That die Idee von drei Dimensionen in sich schließt, weil diese Arten von Ebenen in jedem Sinne die Gestalt und die Seitenflächen der vollen oder leeren Prismen bestimmen, die man fortnehmen oder anschütten muß, um den ebenen Grund eines jeden Grabens, Canals oder Weges, überhaupt einer beliebigen Ebene in einer horizontalen oder geneigten Lage festzustellen.

§ 15. Wir haben bis jetzt nur einen allgemeinen Begriff dieser Art von erhabenen, körperlichen, Ebenen [gewissermaßen Ebenen en relief] geben können, da wir uns bisher nur mit dem begränzten Raume oder Körper beschäftigt haben, und mit seiner Zusammensetzung und Zerlegung aus und zu einförmigen Zellen, welche die Maßeinheit ihres Körperinhalts oder ihrer Capacität darstellen, oder

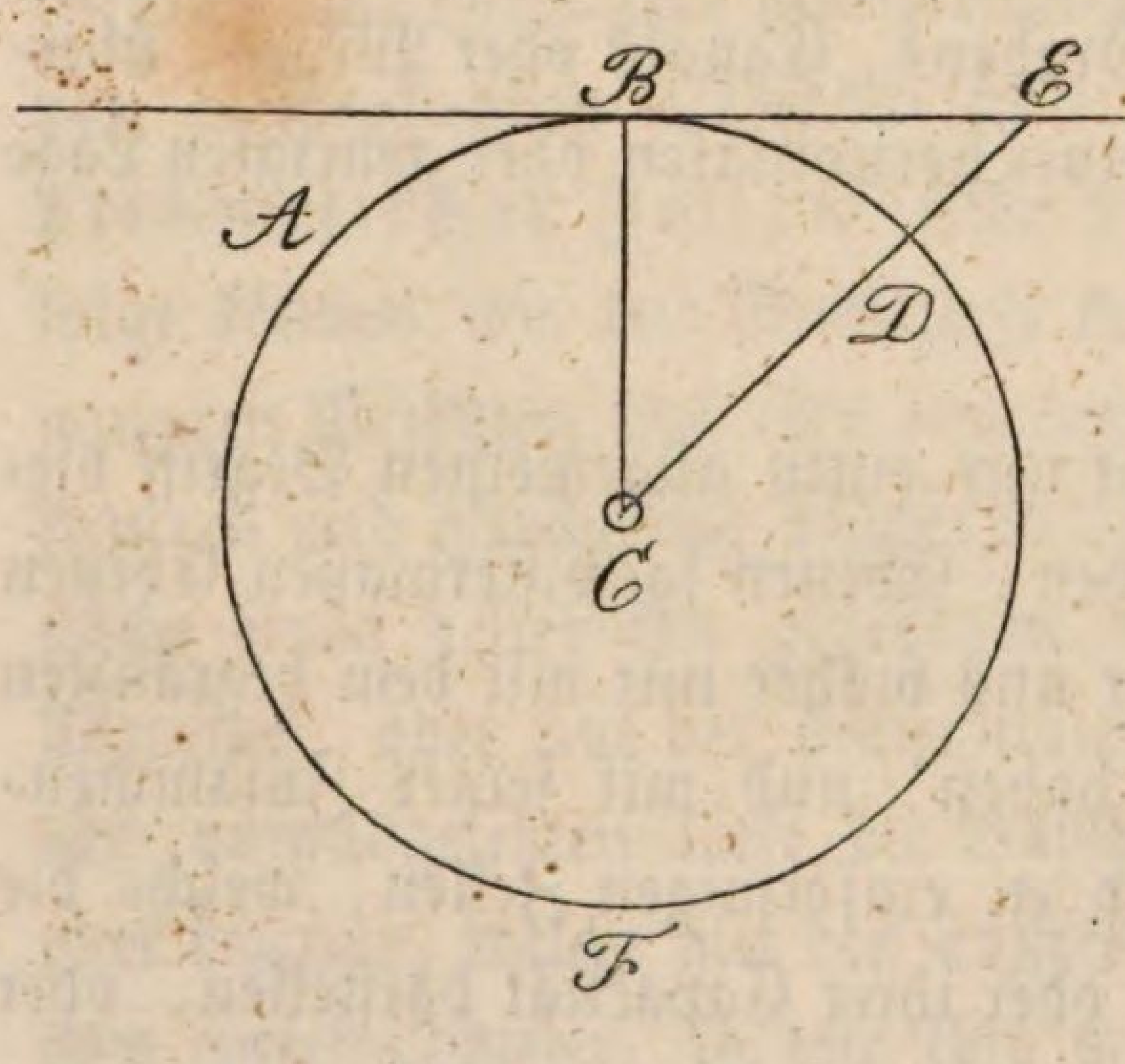
in dreieckige und rechteckige, welche wir ebenfalls auszuwerthen im Stande sind.

Es führt aber auch der Planimeter, den wir beschrieben und in seiner vielfältigen Anwendung kennen lernten, uns nur erst auf den Weg, den wir zu befolgen haben, um einen Theil der zur Construction der erwähnten Ebenen en relief nöthigen Daten, oder die diedrischen Winkel zu bestimmen, welche durch die Seitenflächen der Prismen gebildet sind, die durch die Horizontal-Projektion der Acker- und Terrainflächen auf eine gegebene Ebene bezeichnet werden. Es bleibt uns also übrig, den Gebrauch der Niveaux im Allgemeinen, so wie die verschiedenen durch sie gegebenen Mittel, kennen zu lernen, mit deren Hülfe man auf dem Terrain, wie auf dem Plane, die Längen- und Quer-Profile gekrümmter unebener Terraintheile zeichnen kann, auf denen die Richtung der Communicationswege, Bewässerungs- oder Schifffahrts-Canäle, die Mühlgerinne einer Fabrik, Entwässerungs- oder Drainage-Projekte u. dgl. tracirt werden soll.

Ueber die verschiedenen Arten der Niveaux.

5. Artikel.

§ 16. Zunächst bemerken wir, daß alle Niveaux als Ausgangspunkt entweder die Linie des Bleiloths annehmen, welche an allen Punkten die Richtung nach dem Erdmittelpunkte (die Scheitellinie oder Lothrechte) beibehält, oder die horizontale Linie, welche durch die Krümmung der Erdkugel gegeben ist, die man als wahres Niveau bezeichnet, oder auch die Tangente an diese Krümmung (die Senkrechte zu dem Radius in dem Berührungspunkte), welche man das



scheinbare Niveau nennt. Wenn wir also annehmen, der Kreis ABDF stelle den Umfang der Erde vor, so sagen wir, daß der Bogen BD das wahre, und die Tangente BE das scheinbare Niveau vorstellt. Und wir fügen die wichtige Bemerkung hinzu, daß, da der Erdumfang auf ungefähr 40000000 Mètres angenommen worden, der Radius gleich $\frac{40000000}{2\pi} = 6366196^{m}, 18$ ist, und daß man die Differenz, welche zwischen dem Bogen und der Tangente eines Erdgrades, oder einer Kalotte von 20 Lieues Durchmesser z. B. nur ungefähr $1^{m}, 275$ beträgt, bei einem Nivellement in einem Umkreise von 1 bis 2 Myriametern sehr gut vernachlässigen kann: es erklärt sich ferner auch, daß man diesen Unterschied ebenso wohl thatsächlich annulliren kann, als den durch die terrestrische Refraction verursachten, der nur etwa $\frac{1}{10}$ Millimètre auf 100 Mètres Entfernung beträgt, wenn man das Niveau, dessen man sich bedient, zwischen den beiden Punkten, die vorwärts und rückwärts liegen, und deren relativen Niveauunterschied man kennen lernen will, aufstellt.

§ 17. Die Niveaux sind von verschiedener Form, und führen auf mehrere Arten zu demselben Resultate. Die einen, sagten wir, haben die Bleiloth-Linie zur Basis (die durch den Erdmittelpunkt gehende Vertikale); die andern haben die Horizontale als Basis, oder die Ebene, welche durch das Meer oder die Oberfläche der im Zustande der Ruhe befindlichen Flüssigkeiten dargestellt ist. Die erstere Art ist bestimmt zum Gebrauche für das Maurer- und Zimmermanns-Handwerk, und für alle Nivellements von geringer Ausdehnung. Die zweite Art wird allgemein für die terrestrischen Nivellements angewandt. Da nun von jedem Feldmesser vorausgesetzt werden muß, daß er das Nivellir-Winkelmaß, das dreieckige oder das mit rechtwinkeligen Armen, das der Maurer und Zimmermann gebraucht, kennen werde (welches man auf ein Lineal legt, um dessen Niveau zu bestimmen) und daß er es anzuwenden wisse, um die horizontale Lage einer Mauer, eines Tisches, eines Fußbodens, endlich einer beliebigen Ebene, mit Hülfe des Perpendikels oder des Bleiloths

zu bestimmen, so werden wir hier eine weitere Beschreibung und Anwendung dieser Werkzeuge uns erlassen. In Betreff der zweiten Art von Niveaux, welche mannigfaltiger und weniger gekannt sind, möge die namentliche Aufführung und Anwendung der gebräuchlichsten hier folgen.

§ 18. Das einfachste Instrument, nach seiner Construction und in seiner Anwendung für die weniger ausgedehnten und unwichtigeren Nivellements ist die Canalwage oder Wasserwage, die aus einer cylindrischen, mit einer Flüssigkeit gefüllten Röhre (aus Weißblech oder aus Kupfer) von 10 bis 15 Décimètres (1^m bis $1^m\ 50^c$) Länge besteht, welche an ihren Enden rechtwinkelig zurückgebogen, und hier mit gläsernen cylindrischen Röhren von gleichem Durchmesser versehen ist. Diese stehen offen, um den senkrechten Druck der atmosphärischen Luft zu empfangen, welche gleichzeitig mit der Schwere der Flüssigkeit auf beide Oeffnungen wirkt und also die beiden Säulen dieser Flüssigkeit in zwei zum Horizonte parallelen Höhen erhält, sobald die genannte Flüssigkeit sich zur Hälfte (etwas mehr oder weniger) der Höhe der genannten Glasröhren erhebt, die die Krümmung der Hauptröhre endigen. Dieses Niveau hat unter seiner Mitte eine Dille, mittelst deren man es auf einem dreifüßigen Gestelle befestigt. Um auf dem Terrain sich seiner zu bedienen, füllt man es mit einer hinlänglich gereinigten Flüssigkeit, und richtet auf jeder Station die Röhren des auf dem Gelenke des dreifüßigen Gestelles beweglichen Instruments auf die von der Station aus zu nivellirenden Punkte rück-, vor- und seitwärts, um auf einem eingetheilten Nivellir-Maßstabe, der nach und nach auf alle genannten Punkte getragen wird, die Höhe zu bestimmen, welche der Tangente entspricht, die durch die obersten Flächen des Wassers in beiden Ebenen angegeben ist. Damit nun aber die in dieser Weise durch das Visiren nach dem Nivellir-Maßstabe gemachte Messung bei jeder Aufstellung des Niveau eine regelmäßige sei, und genau der Horizontale folge, muß man die Visirungen auf einen Umkreis von höchstens 40 Mètres einschränken, und Sorge tragen, sich einen oder zwei Mètres hinter das Niveau zu

stellen, um die Reverberation zu vermeiden, welche durch das Säumchen am Rande des Wassers in den Glasröhren verursacht wird. — Die Flüssigkeit pflegt man meistens erst auf dem Terrain, im Augenblicke des Operirens mit dem Instrumente, in die Röhre zu gießen, man behält es dann während des Laufs der Arbeit darin, und verschließt die beiden äußeren Enden mit Pfropfen, sobald man von einer Station zur andern übergeht.

§ 19. Das Luftbläschen-Niveau (auch das röhrenförmige Niveau genannt) hat eine Länge von etwa 1 bis 2 Decimetern. Es besteht aus einer Röhre von Glas oder sehr durchscheinendem Krystall, die im Innern vollkommen kalibrirt und nach oben gegen die Mitte ein wenig erhaben gekrümmt ist. An beiden Enden verschlossen ist sie mit einer sehr gereinigten und sehr beweglichen Flüssigkeit gefüllt, die einen kleinen leeren Raum zurückläßt, der ein der Bewegung des Flüssigen unterworfenes Luftbläschen hervorbringt. Diese also eingerichtete Röhre ist in einem Gehäuse von Kupfer eingeschlossen, das oberhalb ausgeschnitten und auf einem kleinen Lineal, von ungefähr 24 Centimètres Länge auf 3 Centimètres Breite und 2 Millimètres Dicke, dergestalt befestigt ist, daß, wenn die untere Fläche dieses Lineals horizontal steht, das Luftbläschen sich genau in der Mitte der Gradation oder der Reifchen am Nullpunkte befindet, welche die Röhre oder das Gehäuse in seiner Mitte hat. Um sich wohl zu überzeugen, daß diese Stellung des Luftbläschens im Vereine mit der unteren Fläche des Lineals die wirkliche Niveau-Linie bestimme, genügt es, von einem Ende zum andern das Lineal in derselben Stellung herumzudrehen, und wenn alsdann das Luftbläschen nicht seinen nämlichen Platz einnimmt, hebt oder senkt man das eine der Enden der Röhre in dem Gehäuse mittelst einer leichten Lage Papier, wenn das Instrument nicht mit einer Stellschraube versehen ist, die zu dieser unentbehrlichen und jeder Operation vorangehenden Prüfung und Berichtigung dient.

§ 20. Es ist dieses Niveau zum Abwägen eines Maßstabes (Lineals) von gewisser Länge bestimmt, aber gemeiniglicher, um mit denjenigen Instrumenten verbunden zu werden, welche zur genauen Messung der ebenen Winkel, und dieserhalb zur horizontalen Stellung ihrer Schenkel oder Beobachtungsfernröhre dienen. Sobald man aber dies Instrument zu ausgedehnten terrestrischen Nivellements bestimmt, welche eine große Präcision für das Ganze erheischen, so werden diese Niveaux an achromatischen Fernröhren von einer gewissen Länge angebracht. In diesem selben Falle haben wir, da es unerläßlich ist, die Parallelität der optischen Axe des Fernrohrs mit der Axe des Niveau aufs strengste herzustellen, dem Fernrohre unseres Theodoliten und dem unseres Polymeters nicht nur ein Niveau mit doppeltem Ausschnitte gegeben, um in doppeltem Sinne, nach oben wie nach unten, Fernrohr und Niveau umwenden zu können, sondern auch ein bewegliches Fadennetz im Fernrohre mit Stadia (zum Distanziren), um die Entfernungen ohne Verlassen des Standpunktes messen zu können. Außerdem ist dieses Niveau-Distanz-Fernrohr mit einem Zenithkreise in Verbindung gebracht, welcher die Vertikalwinkel sowohl über dem Horizonte*), als unterhalb desselben, mit der Genauigkeit einer Minute mißt, so daß man zu gleicher Zeit, von einer einzigen Station aus, nach Belieben alle Daten erhält, deren man nöthig bedarf, um die correspondirenden Höhen aller beobachteten Punkte, oder die horizontale Projektion der bezüglichen Entfernungen, welche sie von einander trennen, durch logarithmische Rechnungen oder durch die einfachsten graphischen Bestimmungen zu finden; oder endlich, um diese Bestimmungen ohne Rechnung wie ohne graphische Operationen mittelst eines eingetheilten Maßstabes, einer Distanzlatte, zu treffen, die nach jedem beobachteten oder nach jedem zu nivellirenden Punkte, der nicht über die Tragweite des Fernrohres hinaus liegt, durch einen Gehülfen getragen wird. Es versteht sich dabei von selbst, daß man nach Belieben

---

*) Das Wort Horizont drückt in diesem Falle die Linie des Niveau aus, welche durch die optische Axe des Fernrohrs gehen würde, wenn dieses auf den Nullpunkt seines Nonius (seines Vernier) gestellt ist.

die Stationen vervielfältigen kann, sobald dies nöthig, oder durch große Entfernungen und zu steile Abhänge vorgeschrieben erscheint.

§ 21. Es gibt noch Niveaux mit Perpendikel, die wir im zweiten Bande beschrieben und mit dem Namen Pendel-Niveaux bezeichnet haben. Es sind Halbkreise, die mit einem Lineale oder einer Alhidade einer Boussole oder eines Meßtisches, Graphometers u. s. w. verbunden sind und wie ein Vertikalkreis functioniren. Ihr Durchmesser muß in diesem Falle der Axe der Alhidade oder der unteren Fläche des Visirs, mit dem man nach den beobachteten Gegenständen sieht, parallel sein, dergestalt, daß, wenn der Pendel sich bewegt und die Leichtigkeit hat, durch sein Gewicht allein in der dem Beobachtungspunkte entsprechenden Vertikale stillzustehen, die Axe der Alhidade oder die untere Fläche des Visirs, zusammen mit dem Durchmesser des Halbkreises, die Richtung des beobachteten Punktes annehmen, und der Index des unbeweglichen Pendels auf der Bleilothlinie alsdann auf seinem Halbkreise den Neigungsgrad seines Durchmessers anzeigt. Man darf wohl kaum hinzufügen, daß, wenn dieser Index auf die Mitte des Halbkreises oder auf den Radius, der mit 0 oder mit 90 Grad bezeichnet ist, zeigt, die genommene Richtung, zusammen mit der der Axe des Fernrohrs und dem Durchmesser des Halbkreises, auf der Linie des Niveau oder mit ihr parallel sich befinden.

In dem Falle hingegen, wo der Halbkreis um seinen Mittelpunkt beweglich wäre, um durch sein Gewicht allein das Amt des Pendels oder des Bleigewichts zu übernehmen, die beständig durch den erwähnten Radius von Null oder 90 Grad die Vertikale angeben, würde im Gegentheile ein unbeweglicher Index, an das Visir oder das Fernrohr befestigt und ihren schwingenden Bewegungen folgend, in seinen Evolutionen um den Halbkreis herum den Grad der Neigung für die gemachten Beobachtungen angeben.

Wir glauben, daß diese summarische Beschreibung der gebräuchlichsten Niveaux, nach den bereits weiter oben gemachten und mit den noch folgenden Anwendungen hinreichen werden, um Eleven und Dilet-

tanten in den Stand zu setzen, alle beliebigen Nivellements-Arbeiten auszuführen. Es folgt nun hier die Angabe der Art und Weise, in einer Kotentafel und auf Plänen die Operationen der zusammengesetzten Nivellements aufzustellen und zu coordiniren, welche eine Reihe von Stationen und von Verbindungen in verschiedenem Sinne bei der Ausführung der ausgedehnten Entwürfe zur Trockenlegung, zur Berieselung und Bewässerung, zur Canalisation, zur Straßenanlegung u. s. w. erfordern.

§ 22. Um Verwirrung oder Irrthümer zu vermeiden, welche in einem Kotenhefte aus den Vermerken einer großen Zahl von Niveaumessungen, die in verschiedenem Sinne bei dem Ganzen eines oft sehr ausgedehnten Nivellements hervorgehen könnten, so ist es unerläßlich, immer einen regelmäßigen Plan der zu nivellirenden Terrains unter Augen zu haben; in Ermangelung eines regelmäßigen Plans legt man nach dem bloßen Auge einen Plan des genannten Terrains an, um darin auf den hervortretenden Punkten und Winkeln, welche das Ganze des Nivellements angeben sollen, die auf dem Terrain successive gesammelten Koten jeder Station einzuschreiben. Endlich werden diese nämlichen Koten geordnet in einer Tabelle zusammengetragen, welche zu diesem Ende mit Colonnen versehen ist, deren Modell hier folgt:

Nivellements-Punkte	Kote des Stationspunktes	Kote nach vorwärts	Kote nach rückwärts	Positiver Unterschied *)	Negativer Unterschied **)	Endgültige Koten für die Vergleichung ***)	Bemerkungen †)
a							
b							
c							
d							
e							

*) Die positive Differenz ist diejenige, welche angibt, daß der Punkt nach

§ 23. Nach dieser Tabelle sind von uns allgemein die großen Unternehmungen der Trockenlegung oder der Bewässerung, mit denen wir beauftragt waren, praktisch geleitet worden. Ein wenig weicht diese Tabelle von derjenigen ab, welche die Civil-Ingenieure gemeiniglich anwenden, und in der sich nur die einzelnen Messungen mit dem Niveau finden, nach vor- und rückwärts, die auf die Hauptaxe des Entwurfs, mit dem sie gerade beschäftigt sind, genommen werden; während wir darin alle Koten ohne Unterschied figuriren lassen, ebenso wie die Höhe der Axe des Fernrohrs in jedem Stationspunkte, um die Neigungswinkel gegen den Horizont für die Richtungen der nivellirten Punkte benutzen zu können, und dadurch die Möglichkeit zu haben, auf mechanischem Wege oder trigonometrisch, nöthigenfalls die natürlichen oder auf den Horizont projektirten Entfernungen zwischen den verschiedenen beobachteten Punkten zu bestimmen und alle entsprechenden relativen Höhen der Gesammtoperation.

§ 24. Wenn wir nun also einen geometrischen Plan (Fig. 1 Tafel VII) annehmen, der nach Gestalt und Größe ein Terrain darstellt, das unter Wasser gesetzt wird: zur Zeit der Gewitterregen, oder des plötzlichen Anschwellens der Ströme und Flüsse in Folge der Schneeschmelze im Hochgebirge, aus Mangel eines thalabwärts gelegenen hinreichend schnellen und geeigneten Abflusses, und das die Unterdrückung eines Teiches oder großen Bassins erheischte, welches

---

vorwärts höher liegt, als der rückwärts gelegene, — und dieser Unterschied kommt in die fünfte Colonne.

**) Der negative Unterschied ist der, welcher zeigt, daß der vorwärts gelegene Punkt weniger hoch liegt, als der rückwärts gelegene, und die Differenz wird alsdann in die sechste Colonne geschrieben.

***) Diese Colonne enthält die endgültigen (definitiven) Koten oder Ordinaten, welche der allgemeinen Vergleichungs-Ebene entsprechen, die man für den höchsten oder für den tiefsten Punkt des nivellirten Terrains annimmt, oder einer runden Anzahl von Mètres (die man entlehnte Kote oder Hülfs-Kote nennt) unterhalb oder oberhalb derselben Punkte.

†) Diese Colonne ist für die Zenithdistanzen und für alle sonst nöthigen Anmerkungen bestimmt.

augenblicklich noch zum Betriebe einer bedeutenden Fabrik nöthig ist; wenn außerdem diese nämlichen Terrains, die zufälligen Ueberschwemmungen ausgesetzt sind, eine große landwirthschaftliche und industrielle Verbesserung zulassen, und fähig sind, mit einem reellen Gewinne die Kosten einer vollständigen Verbesserung wieder aufzubringen, indem man sie zu gutem Ackerlande, zu natürlichem guten Wiesenboden oder zu künstlichen Wiesen mit Berieselung umarbeitet; wenn endlich wir die Gewässer nutzen oder mehr und mehr theilen wollten, welche immerwährend, Jahr ein Jahr aus, vorhanden sind, oder welche zufällig und torrentiell wirkend von Zeit zu Zeit den tiefer gelegenen Theil des Raumes unter Wasser setzen, der sich eignet, verbessert und trocken gelegt zu werden, um dadurch neue Werke functioniren zu lassen, welche unterhalb des Dammes, der den Behälter, das Wasser-Reservoir, einfaßt, angelegt werden sollen: — so erkennt man in dem einen wie in dem andern dieser ausnahmsweisen Fälle, sagen wir, die Nothwendigkeit der Austrocknung, und die Möglichkeit, an dem oberen Ursprunge, stromaufwärts von den überschwemmten Terrains, ein W a s s e r g e r i n n e mit drei A u s f l ü s s e n herzustellen, oder doch wenigstens eine A b d ä m m u n g mit drei S c h u t z b r e t t e r n, geeignet, um regelmäßig in drei Canäle oder drei besondere Gerinne, nach den Erfordernissen eines jeden Maschinenwerks oder jeder zu berieselnden Zone, entweder die beständig fließenden, oder die zufällig strömenden Wasser, welche das Becken unter Wasser setzen, zu vertheilen. Es versteht sich hierbei, daß die zu hohe Spannung an der Abdämmung zur Zeit der hohen Wasser zu jeder Zeit ohne auszutreten ihren Abzug in den Hauptabzugs-Canal haben muß, dessen Stelle und Richtung immer durch die Linie des größten entsprechenden Gefälles oder Hanges angegeben ist. Wir werden weiterhin sehen, durch welche theoretischen Mittel man dahin gelangt, das M a x i m u m der Wasser zu bestimmen, welche auf einen Punkt einer gegebenen Oertlichkeit zur Zeit der Gewitterregen kommen können, und die Dimensionen, welche man den Entwässerungs-Canälen geben muß, um die Ueberschwemmungen zu vermeiden.

§ 25. Nachdem man nun über den Ausgangspunkt im Klaren ist und ihn auf dem natürlichen Terrain da mit einem Pfahle bezeichnet hat, wo im Plane der Punkt A die Stelle angibt, auf welcher die Sperrung (Abdämmung) am Anfange des Sumpflandes oder des unter Wasser stehenden Terrains angelegt werden soll, stellt man daselbst ein gutes Fernrohr-Niveau auf seinem dreifüßigen Gestelle fest auf, am besten den Theodoliten oder Polymeter (die im zweiten Bande beschrieben sind), da sie zugleich einerseits zum Aufnehmen des Plans dienen können, dessen man durchaus bedarf, um die annähernden Anschläge der auszuführenden Arbeiten aufstellen und anordnen zu können, — andererseits zur Bestimmung der einzelnen Niveaumessungen, die nach allen Richtungen hin über den ganzen Raum des abzunivellirenden Terrainbeckens gemacht werden müssen. Endlich, nachdem man in sorgsamster Weise die Parallelität der Axe des Distanz-Fernrohrs mit der Axe seines Niveau hergestellt hat, und den Beobachtungsmittelpunkt des graduirten Maßstabes in die genaue Höhe der optischen Axe des horizontal gestellten Fernrohrs gebracht hat, läßt man nach und nach den Nivellirmaßstab rings herum tragen, nach rechts und nach links, an alle Punkte des Umfangs des gewöhnlich überschwemmten Terrains, um eine Reihe von Punkten oder demselben Niveau von A entsprechenden Höhen zu beobachten, und um zu gleicher Zeit diesen Umfang durch ein vorläufiges Jalonniren [Ausstecken mit Meßfahnen oder Meßstangen] zu bezeichnen. Es sei derselbe durch die alphabetischen Buchstaben a, b, c, d, e u. s. w. im Plane angegeben.

§ 26. Nachdem diese erste Operation beendet worden, und um uns von ihrer vollkommenen Regelmäßigkeit zu überzeugen, würden wir unseren Nivellir-Kreis nach den, in der Mittellinie des ausgesteckten Polygons, gelegenen Zwischenpunkten B und D z. B. bringen, um von dort aus eine doppelte Gegenprobe durch mindestens fünf Niveaubeobachtungen zu haben:

1°. von der Station B, nach den Punkten A, D, E, C, F und
2°. von der Station D, nach A, B, C, E, F.

Es versteht sich von selbst, daß alle diese einzelnen Niveaumessungen auf dem Nivellir-Maßstabe, der beständig den Mittelpunkt seiner beweglichen Richttafel in der Höhe des optischen Mittelpunktes des Beobachtungsfernrohrs hat, dieselbe Höhenkote ergeben muß, weniger das doppelte Niveaumaß von B und von D nach F, welcher Punkt nach unterwärts an dem Mittelcanal, am Anfange des Teiches oder des Wasser-Reservoirs der Fabrik liegt, und in demselben Niveau wie der Punkt G, am Rande des Wassers auf dem anliegenden Damme, sich befinden muß. Es ist unnöthig, zu bemerken, daß die Erhebung des Wassers über dem Grunde des Grabens, in Punkt G, sehr leicht zu erhalten ist ohne Niveaumessung, entweder mittelst des Bleiloths, oder indem man senkrecht den graduirten Nivellirmaßstab zum Ausmessen der Tiefe bis auf den Grund des Beckens hineinstellt. Es versteht sich, daß man von den drei Hauptstationen, deren wir erwähnten, soviel Niveaubestimmungen nach allen Richtungen hin machen kann, als man wünschenswerth findet.

Nachdem nun auch diese zweite Operation beendet ist, beschäftigt man sich damit, auf demselben Terrain die Richtung und den einem jeden Hauptcanale zu gebenden Fall zu traciren, und nebenbei noch dasselbe für einen jeden Wassergraben oder zugehörigen Abzugsgraben zu thun, der für die völlige Trockenlegung des Terrains nützlich ist. Wenn also z. B. der Punkt F tiefer liegt, als Punkt A, und zwar um 1 Mètre, 30 Centimètres, und die ganze Länge des Mittel-Canals, von A bis F, durch m ausgedrückt wird, so sieht man, daß der mittlere Abfall durch das Verhältniß $\frac{1,30}{m}$ dargestellt ist: hieraus ergibt sich für die ganze Entfernung $AG = 750$ Mètres eine Wassertiefe für Punkt G von $\frac{1,30}{m} \times 750 = 3^m, 70$, und dies Resultat ist die Gegenprobe der weiter oben angegebenen Ausmessung der Tiefe.

§ 27. Es bleibt uns noch zu bestimmen übrig, wie das den Umfassungs- oder den Ableitungs-Canälen, die als Mühlgerinne für die durch Wasser getriebenen Fabrikanlagen (Usinen) oder für die Bewässerung dienen sollen, zu gebende Gefälle geregelt wird: da dieselben

nun eine gleichmäßige und constante Capacität haben müssen, um in geeigneter Weise, wenigstens während einer bestimmten Zeit in jedem Jahre, nutzbar gemacht werden zu können, so haben diese Derivations-Canäle nur eine unmerkliche Neigung nöthig, damit das Wasser durch das bloße Gewicht einer stetigen Projektion des Volumens, oder eines Durchschnitts des Prismas des Flüssigen, schnell an seinem Bestimmungsorte ankomme. Dies erlaubt, das Netz der Trockenlegung so weit als möglich auszudehnen. In solchem Falle genügt ein Zehntheil des Millimètre ($0^{m}, 0001$) auf einen Mètre.

Wenn demzufolge wir annehmen, daß der Umfassungs-Canal oder -Graben ABC eine Längenentwickelung von 1050 m. habe, und ADE eine solche von 1180 m., so würden wir als Resultat einen Fall von $0^{m},0001 \times 1050 = 0^{m},105$ für Punkt C, und $0^{m},0001 \times 1180 = 0^{m},118$ für Punkt E haben; d. h. es muß der Punkt C um $0^{m},105$ unter dem Niveau des Punktes A, und Punkt E um $0^{m},118$ unterhalb desselben Punktes A zu liegen kommen, — oder, mit andern Worten, der Fall wird um 1 Centimètre auf 10 Mètres auf beiden gegenüber liegenden Ufern von dem Punkte A der Abzweigung beider Canäle bis zu deren Ausgangspunkten C und E hin wachsen.

§ 28. Diese neue Richtung für die genannten Umfassungs-Canäle ist noch leicht mechanisch zu beschreiben, und auf dem Terrain durch eine einzige Station in den Punkten A oder B und D auszupfählen, wenn man einen Umfang aussteckt und auspfählt, der unterhalb des ersteren Umfangs (abcd ꝛc.) liegt, und einen gleichmäßigen Fall von $\frac{1}{10}$ Millimètre auf den Mètre hat. Man kann dies sehr leicht, indem man den Nivellirmaßstab von 10 zu 10 Mètres aufstellt, und den Mittelpunkt der beweglichen Richttafel bei der jedesmaligen Aufstellung um 1 Centimètre (für jede 10 Mètres) oder um 1 Décimètre (für jede 100 Mètres) von Punkt A anfangend, höher rückt, und dies in der Richtung ABC wie in der von ADE thut. Man muß hierbei Sorge tragen, daß für jede Nivellementsbeobachtung, die

auf den von 10 zu 10, oder von 100 zu 100 Mètres getragenen Nivellirmaßstab, unterhalb (innerhalb) des horizontalen Umfangs, der Mittelpunkt der Richttafel vollkommen dem Niveau der optischen Axe des Fernrohrs entspricht.

§ 29. Wenn die materielle oder mechanische Operation des Nivellements beendet ist, so schreitet man zur Construction des geometrischen Plans, unter welchen man die Längen- und Quer-Profile des trocken zu legenden Terrains zeichnet, mit den Rissen der erforderlichen Kunstarbeiten; sodann entwirft man die Anschläge aller Erd- und Kunstarbeiten, gibt ein genaues Resumé derselben, artikelweise, in getrennten Aufstellungen, und fügt ein Memoire, einen motivirten Bericht bei, worin man neben den allgemeinen Ausgaben den Kaufwerth des Terrains vor der Trockenlegung, und den wahrscheinlichen Mehrwerth figuriren läßt, den die Terrains in einer angenommenen Frist, durch eine einsichtige Bearbeitung, nach der Trockenlegung haben werden. (Siehe Tafel VII, die Risse eines Wassergerinnes mit Schutzbrettern zur Aufnahme und zum Zurückhalten der Wasser bei ihrem Eintritte in die Sumpfniederung.)

§ 30. Der Gang, so wie wir ihn so eben gezeigt haben, bezieht sich nur auf einen isolirten Terraintheil, oder auf einen solchen, der von einem größeren selbstständigen Besitzthume oder Erbtheile dependirt, und in keiner Weise ein fremdes Eigenthum betrifft oder berührt, — für welchen im Gegentheile des Besitzers oder des Berechtigten Wille allein das Gesetz bildet. — Wenn aber das Zusammenwirken verschiedener mitinteressirter Uferbesitzer nöthig und unentbehrlich ist, oder wenn das allgemeine öffentliche Interesse einer Oertlichkeit die Amelioration und in Folge dessen das Dazwischentreten der höheren Verwaltungsbehörde (welche die natürliche Beschützerin der Rechte interessirter dritter Personen, der rechtsfähigen, wie der rechtsunfähigen, ist) erheischt, so macht die Verbesserung oder Trockenlegung einer Sumpfniederung, oder überhaupt jede durch das allgemeine Interesse einer Gegend gebotene Amelioration vorangängige Formalitäten nöthig, denen jeder Eigenthümer, Unternehmer oder Concessionirter sich

unterwerfen muß, bei Gefahr, gerichtlich außer Besitz gesetzt zu werden, oder in seinem Unternehmen zu scheitern.

Wer also sich dieser Art von Unternehmungen widmen und sich schnell und sicher in der Kunst der Trockenlegung von Sümpfen oder feuchten Landstrecken ausbilden, und sich über die dem Lande zu gebende Bearbeitung, über die geeignete Cultur, um den höchsten Ertrag durch eine fortschreitende Amelioration sicher zu stellen, belehren will: der muß nicht nur in die Gesetze und Reglements über diesen Gegenstand völlig eingeweiht sein, sondern auch die Werke und Vorschriften der Männer vom Fach und von praktischer Erfahrung zu Rathe ziehen. Man findet dergleichen in den Abhandlungen von Crété de Paluel, de Prony, Charisson, und Anderer, welche Poterlet in seinem Commentare über das Gesetz von 1807, über die Trockenlegung der Sümpfe, empfiehlt.

In Nachstehendem geben wir nun einen Auszug aus dem erwähnten Commentare Poterlet's, und insbesondere den ersten Abschnitt, welcher sich mit dem Nachsuchen zur Ueberlassung der Sümpfe (also mit der Concessionserlangung), — mit der Ausführung der Pläne und Entwürfe, die dem Trockenlegen vorangehen müssen, mit der Genehmigung und Publication der genannten Pläne, und mit allen Formalitäten beschäftigt, die zur Ausführung erforderlich sind. Diejenigen, welche weitere Aufklärungen über die Administration der trocken gelegten Strecken, und über die Art, den höchsten Ertrag zu erreichen, wünschen, können sich dieselben durch den genannten Commentar verschaffen. Unsererseits soll in diesem Anhange nur der die Kunst der Trockenlegungen enthaltende Theil behandelt werden.

Commentar zu dem Gesetze vom 16. September 1807, bezüglich der Trockenlegung von Sumpfgegenden.

Erster Abschnitt.

Nachsuchen der Concession.

§ 31. „Die erste Sorge dessen, der sich entschließt, seinen Credit, sein Vermögen und seine Industrie einer so wichtigen Unterneh-

mung zu widmen, wie es das Trockenlegen eines Sumpflandes ist,“ sagt uns Herr Poterlet, „ist, sich der physikalischen Möglichkeit der Operation zu vergewissern.“

„Er muß demnächst zu ergründen suchen, ob die Ausgabe, in welche er sich verwickelt, nicht außer Verhältniß mit den vernünftiger Weise zu hoffenden Vortheilen steht, wie da sind der gerechte Lohn für seine Arbeiten und die Interessen seines Einlagecapitals. Eine Generalübersicht über die Ausdehnung der Sumpfgegend, ihre Situation, die Mittel des Abflusses, ein flüchtiger Blick auf die Qualität und Quantität der Terrains, welche erlangt oder ameliorirt werden sollen, reichen hin, um die ersten Ideen festzustellen, wenn er die erforderlichen Kenntnisse hat.“

„Die genauen Daten über die durch die projektirte Unternehmung gebotenen Vortheile einmal festgestellt, wird des Unternehmers erster Schritt bei der Verwaltungsbehörde der sein, entweder dem Präfecten des Departements, oder dem General-Director des Straßen- und Brückenbaues in der Hauptstadt, eine Petition einzureichen, welche die Absicht, die Trockenlegung des Sumpflandes zu unternehmen, darlegt: es genügt zunächst, nur eine summarische Beschreibung zu geben. Zu gleicher Zeit erbittet er für sich die Ermächtigung, Pläne, Profile, Nivellements aufnehmen und alle anderen vorläufigen Operationen zur Aufstellung eines regelmäßigen Entwurfs ausführen zu dürfen.“

„Diese Ermächtigung ist ihm unentbehrlich, damit er frei sich auf dem Eigenthume Anderer bewegen dürfe, ohne daß die Eigenthümer das Recht hätten, sich dem zu widersetzen, während sie berechtigt sind, für irgend welche Beschädigungen und Zerstörungen Entschädigungen zu verlangen. Die Autorisation sichert ihm außerdem auch in dem Falle die Priorität, daß andere Unternehmungslustige sich für dieselbe Unternehmung melden würden, und kommt also einer jeglichen Discussion zwischen zwei concurrirenden Petenten zuvor.“

„Es kann vorkommen, daß ein Sumpf sich über das Gebiet zweier oder mehrerer an einander gränzender Departements erstrecke: in diesem Falle muß die Petition demjenigen Präfecten übergeben

werden, auf dessen Gebiete der größte Theil des Sumpfes gelegen ist. Ich sagte, daß die Petition nur eine summarische Beschreibung des trocken zu legenden Sumpfes enthalten solle. Es würde voreilig sein, darin irgend eine weiter ausgeführte Proposition oder Submission aufzunehmen, was mit Sachkenntniß und endgültig nur erst geschehen kann, nachdem die graphischen Arbeiten beendet sind, da sie allein den Unternehmer in den Stand setzen können, die Quantität des trocken zu legenden Terrains, seinen Werth, die zu machenden Ausgaben, die zu hoffenden Vortheile kennen zu lernen und demgemäß seine Bedingungen zu stellen."

„Der auf diese Petition erfolgende Beschluß des Präfecten kann aus demselben Grunde nur die bloße und einfache Ermächtigung enthalten, zur Aufstellung des Trockenlegungsentwurfs vorzuschreiten; er muß durch den General-Director des Straßen- und Brückenbaues gebilligt werden, und durch diese Formalität wird jedem andern Unternehmer das Recht genommen, sich zu derselben Operation zu melden. Sie sichert außerdem demjenigen, zu Gunsten dessen der Beschluß erfolgte, die Wiedererstattung seiner Kosten für den Fall, daß er in seiner Unternehmung rechtlich außer Besitz gesetzt würde in Folge der den Eigenthümern reservirten Befugniß, die Entwässerung in den vorgeschriebenen Zeitfristen und in Gemäßheit der angenommenen Pläne auszuführen."

„Es ist endlich noch die Ermächtigung des General-Directors nöthig, damit der Submittirende, ehe er sich in Kosten stürzt, zum Voraus gewiß sei, daß der Sumpf, dessen Trockenlegung er beabsichtigt, nicht dazu bestimmt ist, einstmals für den Dienst der inneren Schifffahrt nutzbar gemacht zu werden."

Anmerkung des Uebersetzers. Es sind bei den sämmtlichen Vorschriften, welche hier zuletzt gegeben werden, fremdländische Verhältnisse, speciell französische, zu Grunde gelegt. Es müssen dieselben nun, um den Verhältnissen deutscher und anderer Länder angepaßt zu werden, die nöthigen Modifikationen erleiden. — Für den Uebersetzer aber mußten die im Texte angenommenen Verhältnisse ungeändert beibehalten werden. — Dasselbe gilt für die Maße, Ge-

wichte und Geldwerthe, deren im weiteren Verlaufe Erwähnung geschieht.

Zweiter Abschnitt.

Pläne und Entwürfe.

§ 32. „Das Gesetz läßt den Unternehmern die Befugniß, die Pläne selbst aufzunehmen, oder aufnehmen zu lassen, oder nur nach der Aufnahme durch die Ingenieure des Straßen- und Brückenbaues prüfen und gutheißen zu lassen."

„In Betreff des Maßstabes hat man sich den angenommenen Verhältnissen anzuschließen, wie sie einmal für den Dienstbetrieb des Straßen- und Brückenbaues bestehen." [Siehe darüber die Tabelle der Maßstäbe am Schlusse des Commentars.]

„Man wird nun also für den Kataster- oder Parzellenplan der Sumpfstrecken den Maßstab wählen, welcher durch N°. 9 oder 10 der Tabelle angegeben ist, je nach der Ausdehnung des Sumpfes; — für den Uebersichts- oder Gesammtplan wird nach demselben Motive der räumlichen Ausdehnung dieselbe Tabelle den zu wählenden Maßstab zwischen den Nummern 12, 13, 14 und 15 angeben."

„Die General- und die Einzelpläne müssen von Nivellements und Querprofilen von 100 zu 100 Mètres begleitet sein, oder doch wenigstens von solchen, die nahe genug an einander liegen, um die Aenderungen des Terrains gut erkennen zu lassen. Diese Nivellements und Profile müssen auf eine einzige horizontale Fläche bezogen sein, und durch entsprechende Nummern auf einen Plan der Oertlichkeit hinweisen."

„Der Maßstab der Quer- und Längenprofile, so wie der für die Nivellements, ist in den Nummern 8, 10 und 11 der mehrerwähnten Tabelle angegeben."

„Der Plan muß ferner noch enthalten:

1°. die Zeichnung einer Umgränzungslinie, welche die beständig unter Wasser stehenden Terrains umschließt, deren Trockenlegung man sich vorgenommen hat;

2°. die Zeichnung einer ähnlichen Linie, welche die Terrains umfaßt, die im Augenblicke der hohen Wasser überschwemmt und unter Wasser gesetzt sind.

Das Ganze muß nach Klassen abgetheilt sein; diese Klassification hat aber erst nach Erlangung der Concessionsbewilligung Statt, mit Zuziehung der Ingenieure und der Sachverständigen, gemäß der Artikel 9 und 10 des Gesetzes."

„Den Plänen, Nivellements und Profilen der Trockenlegung müssen nothwendiger Weise noch beigefügt werden:

1°. ein Voranschlag;

2°. eine vorläufige und annähernde Berechnung im Einzelnen;

3°. ein Memoire, das die vergleichende Uebersicht der erforderlichen Ausgaben und des muthmaßlichen Gewinns enthält, damit die Regierung im Stande sei, festzustellen, welcher Antheil an dem Mehrertrage dem Trockenlegenden, dem Techniker, und welcher Antheil dem Eigenthümer verbleiben soll, dem man den ganzen Theil der Amelioration belassen muß, welcher nicht nöthig ist zum täglichen Lohne, zur Aufmunterung und zur Belohnung der Arbeiter;

4°. endlich die endgültige Submission des Nachsuchenden."

„Nur erst, nachdem ein Projekt in dieser Weise gründlich erwogen und redigirt worden, und der Ober-Ingenieur die durch Art. 5 des Gesetzes vorgeschriebene Verification hat eintreten lassen, wird das Ganze dem General-Director des Straßen- und Brückenbaues durch den Präfecten übergeben, der seine eigenen Bemerkungen hinzufügt:

1°. über die Nützlichkeit der Operation;

2°. über den Antheil des Mehrertrages, welcher dem Concessionirten bewilligt werden soll;

3°. über die besonderen und örtlichen Bedingungen, denen die Concession nach seiner Ansicht zu unterwerfen sein würde."

„Diese Pläne und Projekte sind unabhängig von den genaueren, welche weiterhin durch den Concessionirten geliefert werden müssen für die Kunstarbeiten, wie Brücken, Schleusen, Sperrungen, zu denen er in seiner Eigenschaft als Concessionirter verpflichtet sein kann:

Projekte, welche durch ihre Wichtigkeit eine tiefere Prüfung Seitens der Verwaltungsbehörde erheischen."

Dritter Abschnitt.

Publication des Projekts.

§ 33. „Wenn das Projekt im General-Rathe des Straßen- und Brückenbaues geprüft und durch den General-Director angenommen worden, wird es dem Präfecten des Departements zurückgegeben, der alsdann eine eben so wichtige als unerläßliche Formalität zu erfüllen hat: nämlich, auf gesetzlichem Wege festzustellen, ob die Eigenthümer oder die betheiligten und mitinteressirten Gemeinden beabsichtigen, die ihnen gesetzlich zustehende Befugniß zu benutzen und selbst die projektirte Trockenlegung in den vorgeschriebenen Fristen und gemäß den adoptirten Plänen auszuführen."

„Zu diesem Ende kündigt eine öffentliche Bekanntmachung in allen an der Trockenlegung betheiligten Gemeinden dem Publikum an, daß während eines Monats (zum wenigsten) die Pläne, der Entwurf und die Submission im Sekretariat der Präfektur niedergelegt sind, und dort zu Jedermanns Einsicht bereit stehen. Es ist gut, wenn diese Bekanntmachung am Schlusse eine Tabelle nach alphabetischer Ordnung der Gemeinden enthält, die bei dem Projekte mit einbegriffen sind, und die für eine jede angibt, wie viel Hectaren Sumpfland oder trocken zu legendes Land sie enthalte, — etwa wie folgt:

Laufende Nr.	Namen der Gemeinden.	Flächeninhalt.		
		Hectares	Ares	Centiares
1.		.	.	.
2.		.	.	.
3.		.	.	.
ꝛc.		.	.	.

„Wenn nach Ablauf der Frist die Gemeinden oder Eigenthümer ihren Entschluß nicht kund gegeben, oder den Vorschlägen des Submissionairs ihre Zustimmung ertheilt haben, wird dies protokollarisch ausgesprochen und das Protokoll mit allen Piecen an die General-Direction des Straßen- und Brückenbaues gesandt, — es steht alsdann nichts dem entgegen, das Projekt und das Concessionsgesuch der Billigung der Regierungsbehörde zu unterbreiten."

„Wenn dahingegen die Eigenthümer und die Gemeinden, durch das Organ ihrer betreffenden Ortsvorsteher (maires), sich in der Frist gestellt haben, um selbst die Trockenlegung auszuführen, so müssen sie sofort die ausdrückliche Submission darüber, im Sinne des Artikels 3 redigirt, übergeben. Der Präfekt nimmt hierüber Protokoll auf, wie in dem ersten Falle, und richtet es mit der Submission und seiner eigenen Ansicht der Sache an den General-Director."

Vierter Abschnitt.

Vorläufige Sicherstellung der Mittel zur Ausführung, — und Caution.

§ 34. „Es sei nun, daß die Unternehmung dem ersten Fordernden bleibe, oder daß die Eigenthümer sich stellen, um ihm substituirt zu werden, — die Uebernehmer müssen ihrer Submission einen Act der Sicherstellung, in Geld oder in Immobilien, beifügen, welcher eine hinreichende Gewähr gibt, daß die Ausführung ihrer eingegangenen Verpflichtung in dem bestimmten Zeitraume gesichert sei. Diese Sicherstellung muß mit zu den Piecen gehören, welche dem Staatsrathe vorzulegen sind, um die Ordonnanz wegen der Concession zu erhalten. Sie ist nicht immer unentbehrlich, und es genügt, daß die Verwaltungsbehörde eine genaue Kenntniß und Ueberzeugung von der Zahlungsfähigkeit des Submittirenden habe."

„In Betreff der Gemeinden nun, da sie eine Operation von dieser Art nicht ohne die Ermächtigung des Ministers des Innern unternehmen können, so müssen sie als Beweisstück ihrer Submission einen Nachweis ihrer Hülfsquellen beifügen, um darzuthun, daß sie

in ihrer Gesammtheit die Mittel besitzen, die Trockenlegung in den vorgeschriebenen Fristen und nach dem angenommenen Plane auszuführen."

Das ist nun das Gesammtbild der Formalitäten, welche der Concession und der endgültigen Genehmigung eines Plans und Projekts jeder Trockenlegung von öffentlichem Nutzen vorangehen müssen; der Plan muß von einem Voranschlage, einem vorläufigen Special-Entwurfe und einem Memoire begleitet sein, von dem wir ein genehmigtes und nach allen Regeln der Kunst behandeltes Specimen geben wollen, das dem Gesetze vom 16. September 1807 gemäß ist, und aus den Akten der Präfectur des Nièvre-Departements, welche gleichfalls in den Archiven der General-Administration des Straßen- und Brückenbaues sich in duplo befinden, entnommen wurde. (Die Trockenlegungs-Projekte wurden 1830 von dem Verfasser als Ober-Geometer der compagnie générale de dessèchement [allgemeine Gesellschaft für Entwässerungen und Trockenlegungen] ausgeführt, und gehören zu den verwickeltsten, mit denen der Verfasser zu thun hatte, in Anbetracht der großen Zahl betheiligter Gemeinden.)

Fünfter Abschnitt.

Ueber die Form der Documente, welche ein Trockenlegungs-Projekt begleiten und der Ordonnanz zur Concession vorangehen müssen. — Memoire über die Trockenlegung der Sümpfe des Nohain, von Entrains bis nach Cosne.

Darlegung der Verhältnisse.

§ 35. „Die Mehrzahl der Flüsse oder Zuflüsse der Loire, welche die reichsten Thäler der Bezirke von Nevers und Cosne durchfließen oder bewässern, bringen durch ihre Ueberschwemmungen und beständigen Infiltrationen in ihren meist torfhaltigen Untergrund, aus

Mangel an einem schnellen und geeigneten Abflusse, beständige Sumpfbildungen hervor, die zu ihrer völligen Aufzehrung zur Zeit der großen Hitze nur das weitere Einsickern oder die Verdunstung haben, und die für die Boden-Produktion und die Gesundheit der anwohnenden Bevölkerung, wie für die Thierwelt, schädlichsten, schlechten Miasmen verursachen. Die geringe Erhebung der Höhen oder Hügel, welche sie überragen, und die beträchtliche Entfernung, welche sie zu durchlaufen haben, um zu dem gemeinsamen Reservoir zu gelangen, berauben diese Flüsse und ihre kleinen Zuflüsse des Falles, dessen sie benöthigt sein würden, um schnell und ohne Verzug ihre Wasser fortzuführen, wie gleichzeitig auch dieser Mangel an Fall das Wachsthum der Wasserpflanzen begünstigt, welche ihren Lauf verlangsamen.

Die Senkung des benachbarten Bodens und seine große Fähigkeit, vom Wasser durchdrungen und durchweicht zu werden, hindern auch, daß die Regenwasser noch trübe sind, wenn sie in ihr Bett gelangen, und berauben dadurch die Becken, welche sie bespülen, dieser Niederlagen von Alluvium, welche man sonst überall die den Ueberschwemmungen ausgesetzten Thälern aufhöhen und befruchten sieht. Es geht hieraus hervor, daß der Mangel an Gefälle, namentlich der Mangel an lehmhaltigen Anspülungen, dazu beitragen, die Ablenkung aus dem Bette und die Stagnation der fließenden Wasser um so allgemeiner, tiefer und länger andauernd zu machen, als die gedachten Zuflüsse nicht die Kraft haben, das Wasser schnell genug weiter zu führen.

Der Fluß Nohain, insbesondere, ist einer dieser so nachtheiligen Zuflüsse, welche der menschlichen Industrie Trotz zu bieten und seit Jahrhunderten dazu bestimmt zu sein scheinen, nicht, die von ihnen bewässerten reichen Thäler fruchtbar zu machen und durch einen reichen Ertrag die Mühe und den Schweiß der siechen Bebauer, die an ihren Ufern wohnen, zu lohnen, sondern vielmehr sie zu vergiften und vor der Zeit der Mühe erliegen zu lassen."

§ 36. „Der Nohain hat seine Quelle in dem sogenannten Grunde von St. Cyr, mitten im Thale desselben Namens, südlich

und etwas unterhalb der Stadt Entrains im Canton Varzy, am Fuße eines alten festen Schlosses und anderer mit breiten Gräben umgebenen Ruinen.“

Dieses Thal, und mehrere andere von geringerer Ausdehnung, anfangs gegen Osten und dann gegen Westen geneigt, von dem unteren Ende der Stadt Entrains aus, bis zu dem Punkte, wo sich die Wasser dieser verschiedenen Becken vereinen, scheinen lange Zeit durch ausgedehnte Teiche ausgefüllt gewesen zu sein, welche man seit der Revolution zerstört hat, und die man jetzt gesund zu machen, zu entwässern sucht. Aus einer Vereinigung von Quellen, Sümpfen und Ravins also bildet sich der Nohain, fließt zuerst nach S.W., dann in einer Art von Kreislauf nach N.W. und geht endlich zur Loire, indem er die Stadt Cosne durchfließt, und bei einem durchschnittlichen Falle von $\frac{15}{10}$ Millimètres auf den Mètre ($0^{m},0015$) eine Längenentwickelung von etwa (50000) funfzigtausend Mètres durchlaufen hat.

Dieser Fluß hat drei Hauptzuflüsse, den Chandoux, den Manoir und die Talvane, welche wie der Nohain eine große Menge von Usinen*) treiben, die zum Theil sehr nahe an einander liegen, meist aber in Bezug auf die Wasserspeisung sehr übel situirt sind. Man erkennt, daß das Bett dieses Flusses und seiner vornehmlichen Zuflüsse allmälig und während langer Zeit durch Menschenhände vorgezeichnet worden ist, und daß die Natur wenig dabei mitgewirkt hat. Denn sie alle befinden sich fast überall außerhalb der Linie des größten Falls, ohne Verhältniß gegen die Wassermenge, welche von allen Seiten zur Zeit der Regengüsse dorthin gelangen muß, und in Betreff des besonderen Betriebes der industriellen Anlagen (der Usinen) ohne Rücksicht auf die Interessen der Uferbewoh-

*) Unter Usinen (usines) die durch Wasser getriebenen oder doch das Wasser zu ihrem Betriebe benutzenden Werke, Hüttenwerke, Fabrikanlagen, überhaupt industrielle Anlagen verstanden. Anmerk. d. Uebersetzers.

ner. Es resultiren daraus nothwendiger Weise diese unzähligen Ableitungen, die schlecht dirigirt und schlecht unterhalten sind; diese so fühlbare Verminderung der Schnelligkeit in ihrem Laufe, diese fortwährenden Ueber-Uferungen, diese unermeßlichen fauligen Sumpfniederungen, der Mangel aller Mittel zu einer regelmäßigen Bewässerung, zu Pflanzungen und einer verständigen Bodenbebauung, — daher endlich eine unendliche Menge von Produkten und substantiellen Hülfsmitteln, die Privatinteressen geopfert werden, und folglich jene beständigen Reclamationen, da die Uferbewohner in der materiellen Unmöglichkeit sich befinden, einen Abfluß für die Gewässer herzustellen, welche in den ihnen zugehörenden ausgedehnten Wiesen fast stehen bleiben; sie können nicht die Schilfpflanzen, die Binsen, Schachtelhalme und andere Wasserpflanzen zerstören, die das besondere Produkt jener Gewässer und die Ursache der torfartigen Bildungen und der beständigen Ausdunstungen sind, welche weithin die Luft ungesund machen und die immer sich wiederholenden endemischen Fieber veranlassen, denen die unglücklichen Bewohner jener Gegenden stets ausgesetzt sind, und durch die sie jährlich decimirt werden. Gemeiniglich findet man dort ein bleiches, leichenfarbenes Aussehen, — Schäfer und Schnitter haben von Jugend auf Anschwellungen und Krankheiten der Beine, die Bevölkerung verkümmert von dem Alter von 50 Jahren an, und die Zahl der Sterbefälle überschreitet sehr bedeutend die der Geburten.

Indessen durchziehen, wie wir sagten, der Rohain und seine Zuflüsse unendliche Wiesenflächen und speisen eine große Zahl Usinen: diese Wiesen sind für die Gegend, welche sie besitzt, um so kostbarer, als sie fast ausschließlich das nöthige Futter liefern müssen, das jetzt für den Verbrauch von 13 Gemeinden vier verschiedener Kantone mit etwa 20,000 Seelen, die an den Ufern der Loire wohnen, unzureichend ist. Von Norden nach Süden geht eine der Hauptstaatsstraßen durch die Gegend, von Osten nach Westen eine Straße zweiten Ranges.

Man fragt sich, nicht ohne Grund, was die Entsumpfung und Verbesserung dieser schönen Landschaft hat verzögern, — was so lange

Zeit die Eigenthümer in einer so verblendeten Sorglosigkeit hat erhalten können? Die Antwort liegt hier, wie bei so vielen andern Fragen der Nützlichkeit und des öffentlichen Interesses, in den Schwierigkeiten, welche die besten Entwürfe stören, und die eines Theils aus dem Mangel beschützender Specialgesetze herrühren, andern Theils aber aus dem Mangel an Einsicht bei den Interessirten, und häufiger deshalb, als wegen natürlicher Schwierigkeiten unterbleiben: gemeiniglich sind überdies noch die Schwierigkeiten gerade durch Diejenigen angeregt und in den Weg geworfen, welche das größte Interesse haben sollten, sie zu umgehen. Es bedurfte aber auch der Erfahrung mehrerer Jahrhunderte, um ein beschützendes und ermunterndes Gesetz zu erlangen, das geeignet war, die nöthigen Kapitalien anzuziehen, und die Industrie der Speculanten anzuregen, so wie dem hartnäckigen Widerstande eines übel verstandenen Interesses Gränzen zu setzen, indem man ihm die kräftige Thätigkeit eines mehr erleuchteten Interesses entgegenstellte.

§ 37. Das Gesetz vom 16. September 1807 nun versöhnt alle Interessen und muß bei der Operation der Entwässerungen ꝛc. seine ganze Anwendung finden. Es ist nicht bloß das allgemeine Interesse für die zahlreichen Produkte des Ackerbaues, welche verloren oder verdorben werden in einem für den Absatz günstig gelegenen Landstriche, für die Vermehrung des Viehstandes, die Verbesserung der Arten, und für den reichlicheren Vorrath an Düngungsmitteln, das die Anwendung jenes Gesetzes wünschenswerth machen muß; es ist eben so sehr die Rücksicht auf eine leidende Menschheit und auf die Anhäufung einer großen Menge von Individuen, welche mitten in einer Gegend leben müssen, die Ansteckung und Krankheit auf einem Raume von 20 Quadrat-Lieues verbreitet, — welche die Regierung, die Gemeinde-Verwaltung und die unter der Verwaltung Stehenden bewegen mußte, die Anwendung dieses Gesetzes zu verlangen und die Gesellschaft „zu unterstützen und aufzumuntern“ [nach dem üblichen Wortlaute des Präfectur-Erlasses für die Ermächtigung], welche die wichtige Arbeit der Entwässerung auszuführen bezweckt.

Die Ursachen der häufigen Austretungen des Rohain und seiner Sümpfe sind somit mehrfach, und besonders sind es die folgenden:

1°. Die geringe Eintiefung seines Bettes, und der Zustand von Anhäufung von Schutt 2c. in gewissen Theilen.

2°. Die Unterbrechung seines natürlichen Flusses durch Stauungen, deren Zweck eine höhere Wassersperrung ist, um dadurch die zur Wirksamkeit der Usinen angelegten Wassergerinne (Canäle) zu füllen.

3°. Die Verlangsamung des Wasserlaufs durch andere Ableitungen, die aus Privat-Rücksichten und dem Interesse der Mehrzahl der Uferbewohner zuwider gemacht worden sind.

4°. Das wenige Gefälle, im Verhältnisse der zu großen Menge von Windungen und Krümmungen, durch welche die Schnelligkeit des Fließens verringert wird.

5°. Endlich die Infiltrationen und Durchsickerungen der unter dem Niveau des natürlichen Bodens angelegten Wassergerinne, die in dem tieferen Grunde hervorspringenden Quellen, und die Regenwasser, welche die Gewässer des Hauptstromes nicht mehr erreichen können.

§ 38. Als die betheiligten Municipalräthe aufgefordert wurden, ihre Ansicht auszusprechen und das vom Gesetze ihnen bewilligte Privilegium auszuüben, oder darauf zu verzichten, so konnten dieselben sich nicht darüber verständigen, das von der submittirenden Gesellschaft vorgelegte Entwässerungs-Projekt zur Ausführung zu bringen.

Andererseits scheinen einige wenige große Eigenthümer, welche bei der Entwässerung interessirt sind, ganz neuerdings den Wünschen einiger Unternehmer in ihrem Bezirke nachgegeben zu haben. Diese, ohne sich um die nöthigen Formalitäten, und um die Vortheile zu bekümmern, welche das Gesetz den verbesserten Landstrichen zum Besten der Eigenthümer und der späteren Käufer gewährt [Befreiung von jeder Steuer während 25 Jahren], haben als unvorsichtige Spekulanten behauptet, daß die einfache Correctur des Hauptstroms ein hinreichendes Mittel zur Erreichung des gewünschten Ziels sei. —

Die Majorität aber hat sich stark gegen diese halbe Maßregel ausgesprochen, da sie alle alten Mißbräuche bestehen läßt, außerdem eben so schlecht ausgedacht als in ihren Erfolgen ungewiß ist, mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Interessen, welche sich daran knüpfen, auf die anzuwendenden Mittel der Ausführung, auf die zu machenden Durchstiche und Regulirungen, auf die Usinen, welche eingehen müßten, — auf die Wasserläufe und künstlichen Gerinne, welche zu regeln wären, und endlich mit Rücksicht auf die Entschädigungen, welche bewilligt oder gefordert würden.

Diese Majorität nun hat sich leicht überzeugen lassen, daß eine bereits für ganz Frankreich organisirte Gesellschaft, die allen Privat-Interessen fremd ist und nur nach einem Gesetze verfährt, das sie alle schützt, die unter einer einsichtigen und fürsorgenden Verwaltung wirkt und von dieser unterwacht wird, welche die Beamten des Wege- und Brückenbaues als Führer, erfahrene Directoren und Arbeitsführer, Ateliers aller Art in beständiger Thätigkeit und beträchtliche Kapitalien zu ihrer Verfügung hat; — daß eine so organisirte Gesellschaft allein eine Operation von so großer Wichtigkeit ausführen und bis zu Ende bringen lassen könne.

§ 39. Nach diesen lokalen Entscheidungen nun wird die allgemeine Entwässerungs-Gesellschaft sich durch Privilegium sowohl, als durch den Wunsch der Mehrzahl der Eigenthümer berufen sehen, das fortzusetzen, was sie durch die oben erwähnten Erlasse zu unternehmen ermächtigt worden war. Die Pläne, Nivellements und alle bis dahin gemachten Untersuchungen haben ihr bewiesen, daß die bloße Correctur des Flusses ein unzureichendes Mittel sei, um diese unendliche Wiesenfläche gegen häufige Ueberschwemmungen sicher zu stellen und um die Zerstörung der Sümpfe zu bewirken, welche für die Gesundheit der Einwohner und für die Boden-Produktion so schädlich sind.

Da man in der That, nach den Untersuchungen Prony's, weiß, daß die Wassermenge, welche ein Fluß durchlassen kann, als Maß das Produkt des mittleren Durchschnitts seiner großen Wasser mal seiner Geschwindigkeit haben muß, und daß man nicht beliebig über die

Geschwindigkeit, welche von dem Gefälle abhängig ist, bestimmen kann; da man ebenso aus der Erfahrung, nach dem Verhältnisse der Oertlichkeit und aus der Bestimmung der Wassermengen, welche jährlich und an einem Tage großer Regengüsse auf die Oberfläche der Becken und Abhänge fallen, die dem Flusse Rohain sein Wasser zuführen, weiß, daß das gegenwärtige Bett dieses Flusses, selbst in gewöhnlichen Zeiten, nur einen Theil der Gewässer des Hauptthals aufnehmen kann; — daß ein anderer Theil in dem tiefer liegenden Grunde durch Einsickerung in Bodenspalten und unsichtbare Abgründe sich verliert, ein Theil ferner durch Verdunstung aus Mangel an einem regelmäßigen Abflusse verloren geht; so folgt daraus augenscheinlich, daß, um alle Gewässer nebst denen der starken Regen und Schneeschmelzen aufzunehmen, das Bett des Flusses eine Breite und Tiefe haben müßte, die außer allem Verhältnisse stände, und in dem vorliegenden Falle namentlich ganz unthunlich sein würde.

Nach allen diesen Betrachtungen und nach den auf verschiedenen Punkten des Wasserlaufs des Rohain gemachten Untersuchungen sind wir zu einer Reduction im mittleren Durchschnitte des Hauptabzugs-Canals gelangt, welche durch die Formel

$$au + bu^2 = p \cdot \frac{w}{x} \text{ und}$$

$$Q = uw$$

gegeben ist, und eine mittlere Breite von $15^m,23$ auf eine Höhe von $1^m,50$, ein Mittel von $13^m,50$ Breite auf $1^m,50$ Tiefe ergibt.

Die Mittel, welche wir vorschlagen, um diese große Terrainfläche vor den Ueberschwemmungen zu bewahren, welche Unfruchtbarkeit und Krankheit für diese unglückliche Gegend hervorbringen, bestehen nun in Folgendem:

1°. das Bett des ursprünglichen Flusses in der Linie des größten Gefälles wieder herzustellen, und zwar in solchen Dimensionen, daß es die Wassermenge des mittleren Wasserstandes in einer Tiefe von wenigstens 50 Centimètres ($0^m,50$) unter dem Bodenniveau der Wiesen enthält.

2°. Die durch die großen Wasseranschwellungen und Schnee-

schmelzen zufällig veranlaßte Ueberfülle an Wasser in dem Hauptcanale mittelst anliegender Dämme festzuhalten, welche durch Anpflanzungen verstärkt werden, und auf den beiden Ufern außerhalb dieser Dämme noch Gräben (Vorgräben) an ihnen entlang zu führen, die zur Aufnahme augenblicklicher Infiltrationen und derjenigen Wasser bestimmt sind, welche von außen her heranfließen könnten.

3°. Die Schnelligkeit des Hauptstroms durch Abkürzungen des Laufs und durch Unterdrückung der hauptsächlichen Windungen des alten Bettes zu vergrößern.

4°. Durch Wehre, die man in einer durch den Landesbrauch bestimmten Höhe anlegt, die Wasser der Hüttenwerke, Mühlen u. s. w., welche sich vorfinden, zu regeln.

5°. Umfassungsgräben herzustellen, welche die Regenwasser aufnehmen und sie bequem zum Hauptflusse führen sollen.

6°. Ebenfalls Seitengräben anzulegen, im Allgemeinen zur Entwässerung der nassen Niederungen, wie auch der Moräste, der quelligen Stellen, der Sumpfgegenden 2c.

7°. Auf den verschiedenen Umfassungs- und Zwischen-Gräben die Mittel zu bewahren, um eine genügende Anzahl von Berieselungs-Ausflüssen herzustellen.

8°. Einige Usinen (Hüttenwerke 2c.) zu unterdrücken, oder in angemessener Weise die Sohlen der vorhandenen Mühlgerinne niedriger zu legen, und Fälle des Wassers anzubringen, um deren andere herstellen zu können.

Dies ist im Ueberblicke das Entwässerungs-System, das wir zunächst vorschlagen, und das durch die Kunstarbeiten, welche in dem hier angefügten Anschlage beschrieben sind, eine Vervollständigung finden wird. Es bestehen dieselben:

1°. in der Construction einer hinreichenden Zahl von größeren und kleineren Brücken verschiedener Ordnung, auf den den Nohain passirenden Wegen, oder auf den Abfuhr-Wegen, welche zur Benutzung und zur Passage der entwässerten oder in den Entwässerungs-Arbeiten einbegriffenen Gegenden nöthig sind.

2°. in der Construction einer gewissen Anzahl massiver

Wehre, die dazu dienen sollen, die beständigen Wasser des Nohain zwischen den verschiedenen Usinen, welche beibehalten oder reconstruirt werden sollen, zu regeln und zu theilen.

3°. endlich in der Construction einer genügenden Menge von Wassergerinnen und Schutzbrettern zum Zurückhalten des Wassers und zur Speisung mit dem zur Nutzung der entwässerten Terrains in gewissen Perioden des Jahres nöthigen Wasser.

Hiermit nun würde, nach unserer Ansicht, die Darlegung der Arbeiten schließen, deren Ganzes die vollkommene Entwässerung, resp. Trockenlegung, des Nohain und damit so große Vortheile für eine zahlreiche Bevölkerung herbeiführen soll, indem sie den Territorial-Reichthum um etwa 2150 Hectaren eines unproductiven und großentheils unzugänglichen Terrains vermehren, das aber sehr werthvoll und fähig ist, durch eine umsichtige Cultur schnell die Quelle der endemischen Krankheiten zu verschließen, welche seit Jahrhunderten diese Landschaften heimsuchen, und den Reichthum dieses Theils des Nièvre-Departements zu erhöhen, welcher bereits durch seine Nutzen bringenden Waldungen, seine Hüttenwerke und seine Bergwerke so bemerkenswerth ist, und dessen Etablissements dieser Gattung durch die Wichtigkeit und Vorzüglichkeit ihrer Produkte zu den ersten und besten zählen.

§ 40. Die Ausgaben und Kosten würden kein Hinderniß für die Ausführung der Arbeiten sein können. Nach den positiven Berechnungen, die wir nicht Anstoß nehmen hier beizufügen, kann jeder Praktiker sich davon überzeugen. Die scheinbar bedeutenden Ausgaben übersteigen nicht die Hülfsquellen, welche die Gegend in sich schließt, und werden mit Zinsen dadurch wiedergewonnen, daß der Wohlstand in eine Gegend einkehrt, welche im Stande ist, der Industrie, wie dem Genusse einer zahlreichen Bevölkerung einen starken Mehrertrag zu bieten. Die acht Zehntheile etwa dieser Ausgaben werden zunächst der bedürftigen Klasse an Ort und Stelle zu Gute kommen, d. h. durch Bezahlung und Ernährung der Arbeiter oder durch den Arbeitslohn im Allgemeinen und durch die Lieferung der

Hölzer, des Eisens, der Werkzeuge, Leistung von Fuhren ꝛc., die zur Arbeit nöthig sind und welche sich im Lande vorfinden. Diese Ausgaben können außerdem in natura oder in Geld gemacht werden durch ein Ueberlassen oder ein Verkaufen eines Theils des Terrains; sie können übrigens keinen Falls dem Werthe gleich kommen, welchen das entwässerte und gesund gemachte Land erlangt, ohne selbst den hohen Vortheil verbesserter Production zu rechnen, den man in geringer Zeit durch die weiteren Anlagen, durch Anpflanzungen aller Arten Bäume, welche jeder Besitzer anzulegen sich beeifern wird, daraus ziehen und gewinnen muß.

§ 41. Das von den Wässern und nassen Niederungen eingenommene, fast beständig überschwemmte oder unbebaute Terraingebiet enthält nun ungefähr 2150 Hectaren. Das Kataster ist in zwei Dritttheilen der genannten Sumpfgegend so eben beendet, und die Abschätzungen der Experten, die mit den Klassifizirenden und den Bezirksversammlungen in Gegenwart der abgeordneten Agenten der Verwaltung der direkten Steuern berathen worden sind, haben für die Wiesen erster Klasse, die einen geringen Theil nur bilden, einen Reinertrag von 20 Francs per Hectare nicht überschritten; für die Wiesen zweiter Klasse nur 7 Francs, und für die Wiesen dritter Klasse, welche die Mehrzahl sind, nur 5 Francs. Der Kaufwerth dieser Terrains in ihrem jetzigen Zustande würde also nur von 120—500 Francs für die Hectare sein, so daß [wenn wir ein Mittel nehmen, das sich mehr den Ungleichheiten an Werth und Größenausdehnung der Klassen nähert, indem man fünf statt drei Klassen bildet, besonders wegen der Unterschiede in der Entfernung der Debouchéen zu den Verbrauchsmärkten der Produkte, oder wegen Mangels an Arbeitskräften an Ort und Stelle] wir zu einem mittleren Werthe von 300 Francs gelangen, der höchstens ein Kapital von 800 bis 860000 Francs darstellt: also . . . . . . Fr. 860000

die seit mehreren Jahren gemachten Untersuchungen sehr verschiedener Punkte dieser Gegenden, sowohl der Eigen-

Latus Fr. 860000

Transport Fr. 860000

thümer, als auch die Bodenuntersuchungen, welche wir selbst ausgeführt haben, um die Natur der tiefer liegenden Bodenschichten kennen zu lernen; — ferner die Anerbietungen, die uns gemacht worden sind, um gewisse Theile Land zu verbessern: dies Alles hat uns dazu geführt, einen mittleren Werth von mindestens 1200 Francs für die Hectare anzunehmen, für 2150 Hectaren also . . . . Fr. 2365000

was also einem Mehrertrage des Grund und Bodens von . . . . Fr. 1505000

gleich kommt.

§ 42. Berücksichtigen wir nun, daß wir über eine große Wassermenge frei verfügen können, welche in dem jetzigen Zustande sich durch Einsickerung und Verdunstung während eines zu langen Verweilens in den unter Wasser stehenden Becken verliert. Diese Vermehrung des fließenden und befruchtenden Wassers wird für die Hüttenwerke wie für die landwirthschaftlichen Produkte ein Zuwachs an Kraft und Belebung sein, der nicht geringer veranschlagt werden kann als zu $\frac{1}{10}$ der jetzigen Produkte, die im Minimum 50000 Francs haben, oder ein Kapital von etwa 1,250000 Francs darstellen, deren Zehntheil also . . . . Fr. 125000

sind.

Die Anpflanzungen von Bäumen 2c. werden stufenweise den Werth derselben Terrains um ein Zehntheil des gegenwärtigen Werthes vermehren, also um . Fr. 86000

Die Befreiung von der Grundsteuer während eines Zeitraumes von 25 Jahren wird bei dem Reinertrage von 28 Francs für die Hectare, den der Boden nach der Ent-

Latus Fr. 1716000

Transport Fr. 1716000

wässerung erlangt haben wird, ein jährliches Benefiz von 12040 Francs, also in 25 Jahren, ohne die Interessen, ... Fr. 301000

ergeben. . .

§ 43. Damit nun eine übelwollende Kritik nicht die hier angestellten Berechnungen als übertrieben ansehe, so wollen wir hier nur in Erinnerung bringen, was für eventuelle Werthe, die sich nicht abschätzen lassen, aber reell sind, aus der in Rede stehenden Operation folgen; nämlich:

1°. die aus der allgemeinen Vermehrung der Produkte erwachsenden Zinsen mit . . . .

2°. die größere Quantität Vieh, welche mehr gehalten und ernährt werden kann, und die bessere Beschaffenheit der Produkte jeder Art . . . .

3°. die Vermehrung an Düngungsmaterial, an Stroh und Heu, die daraus folgende fortschreitende Verbesserung an Ländereien und die Vermehrung an Körnern und an allen Nahrungsmitteln rc.

4°. die gesündere und bessere Luft, die Verbesserung des Gesundheitszustandes der Einwohner, — folglich auch der Zuwachs an Arbeitskräften, die dem Landbaue angehören, und die bei einer kräftigeren Nahrung mehr leisten können, da alle Produkte verbessert und vermehrt worden sind . . . .

5°. endlich der dem Landbaue, der Industrie und dem Handel gegebene Aufschwung, sowohl durch die Bedeutung der in ihn hineingebrachten Kapitalien, als auch durch die der Produkte und durch die Leichtigkeit, welche man hat, sie schnell abzusetzen . . . . .

Gesammtbetrag des wahrscheinlichen Mehrgewinnes Fr. 2017000

Latus Fr. 2017000

	Transport Fr.	2017000
Gesammtausgabe, nach den muthmaßlichen Anschlägen	Fr.	800000
Bleiben als reines Benefiz zwischen Eigenthümern und Concessionärs zu theilen	Fr.	1,217000

§ 44. Alle diese leicht verständlichen, einfachen und mäßigen Berechnungen beweisen, daß die beabsichtigte Unternehmung unerläßlich geworden ist, und daß die Resultate gewisse, und für die Eigenthümer, welche sie gewünscht haben, unendlich vortheilhafte sind, daß endlich diejenigen, welche sie beschlossen haben und sie auszuführen Willens sind, keine irgendwie ungünstige Chancen laufen, da die betreffende Verwaltungsbehörde mitwirkt, indem sie die Zustimmung und Ueberwachung hat. Sie können indeß nicht darauf rechnen, große Resultate mit gewöhnlichen Hülfsmitteln zu erlangen, und selbst zu einer leichten und schnellen Ausführung bedürfen sie nicht nur eines Beschützers und einer Stütze für alle die Interessen, welche sich an eine gute und schnelle Ausführung knüpfen, sondern auch der pecuniären Mittel, einer Organisation, eines Zusammenhanges und eines Zusammenwirkens der Beschlüsse und Willensmeinungen, was sich sehr selten nur in dreizehn sehr auseinander liegenden Gemeinden, deren Interessen oft so weit auseinander gehen, finden wird.

Geschehen zu Nevers den 1. Juni 1830.

Für den Ober-Geometer der allgemeinen Compagnie für Entwässerungen.

gez. L.

Sechster Abschnitt.

Sumpfniederungen des Rohain.

Entwurf eines Anschlags für die zur Entwässerung des Rohain und seiner Zuflüsse auszuführenden Arbeiten.

Allgemeiner Anschlag.

Titel I. Erdarbeiten.

§ 45. Die Entwässerungs-Arbeiten der Niederungen des Rohain werden an der Mühle l'Eveque, Gemeinde von St. Pierre, anfangen.

Die Canäle, Gräben und Vorgräben, Ableitungsrinnen, Ausgrabungen und Dämme, welche den Gegenstand der Entwässerung des Nohain bilden, sind nachstehend bezeichnet und werden nach den Richtungen, Gefällen und Profilen, welche auf den dem Anschlage beigefügten Plänen und Zeichnungen angegeben sind, ausgeführt werden.

Die Canäle, Gräben und Abzugsrinnen, Vorgräben und Dämme werden die folgenden allgemeinen Dimensionen haben, nämlich:

§ 46. Der Hauptcanal. 1°. Von Punkt A oberhalb der Mühle l'Eveque, bis zu dem unterhalb der Mühle la Rousse, an der Vereinigung des Manoir- und Chevroux-Bachs gelegenen Punkte B, wird der Canal des Hauptstroms 15 Mètres Breite oben, 1^{m},50 Tiefe, und 12 Mètres Breite auf dem Grunde haben. Die Längenentwickelung dieses ersten Theils ist etwa 7940 Mètres und wird durch die Abschnitte und im Plane angezeigten Geradelegungen auf etwa 7500 M. verringert, wovon

zu verbessern, zu erweitern und zu regularisiren sind . 3990 M.

und neu auszuheben eine Länge von . . . . . . 3510 –

2°. Von der Mühle la Rousse bis zum Punkte des Granges, wo die Wasser des Chandoux-Baches (Punkt C) einfließen, wird das Bett des Flusses 11 Mètres obere Breite, 1,^{m}50 Tiefe und 8 M. Breite im Grunde haben. Die Länge dieses zweiten Theils ist ungefähr 4410 Mètres, und wird durch Abschnitte und Rectificirungen auf etwa 3672 M. verringert werden, von denen auszubessern rc. sind. . . . . 860 –

und neu zu machen, etwa . . . . 2816 –

3°. Von diesem letzteren Zuflusse bis zu dem der Talvane, die mit dem Nohain sich im Punkte D vereint, der mitten in der Stadt Donzy liegt, wird der Hauptcanal 9 Mètres obere Breite, 1^{m},50 Tiefe und 6 Mètres Breite im Grunde haben. Die Länge dieses dritten

Latus 11176 –

Transport 11176 M.

Theils wird von 9420 Mètres ungefähr auf 8444 Mètres verringert, von denen zu corrigiren sind . . . 3700 –
und neu zu arbeiten . . . . 4744 –

4°. Von dem letzten Punkte bis zum Dorfe la Crotte, im Punkte E, am Einflusse der Wasser des Ciez-Thales, wird der Rohain 7 M. obere Breite, 1^m,50 Tiefe, und 4 M. Breite am Boden haben. Dieser vierte Theil wird von 7000 Mètres auf ungefähr 5820 Mètres verringert; nämlich zu corrigiren . . . . 1500 –
und neu zu machen . . . . 4320 –

5°. Von la Crotte bis zum Méneftreaux-Bache, Punkt F, wird das Bett des Flusses 6 M. obere Breite, 1^m,50 Tiefe und 3 M. Breite im Grunde haben. Dieses fünfte Stück hat eine Längenentwickelung von etwa 8900 M., und wird auf etwa 7610 M. reducirt, nämlich zu rectificiren . . . . 1480 –
und neu zu machen . . . . 6130 –

6°. Von Punkt F bis zur Einmündung der Bäche von St. Cyr und Trailong, in Punkt G, etwas unterhalb der Stadt Entrains, wird der Hauptcanal 5 M. obere Breite, 1^m,50 Tiefe und 2 M. Breite im Grunde haben. Dieser sechste Theil hat eine Länge von etwa 5160 M. und wird auf etwa 4630 M. reducirt, nämlich auf eine zu bessernde, zu rectificirende und zu reinigende Länge von . . . . 1530 –
und auf eine Neu-Construction von . . . . 3100 –

7°. Der Bach von St. Cyr endlich wird bis zum Punkte H, dem sogenannten Abgrunde von St. Cyr, 3 M. obere Breite, 1 M Tiefe, und 1 M. Breite im Grunde haben, und diese mittleren Dimensionen, wie die auf alle anderen Theile des Hauptcanals des Rohain bezüglichen, werden sich unmerklich und all-

Latus 37680 –

Transport 37680 M.

mälig bis zu dem Punkte I hin vermindern, wo, an dem äußersten Ende der Sumpfniederung, der Canal auf eine obere Weite von 1,50 M., eine Tiefe von 0^{m},50 und eine Breite im Grunde von 0^{m},50 beschränkt werden muß. Die Gesammtlänge der Flußentwickelung des Bachs von St. Cyr, zwischen den Punkten G und I, ist von etwa 4910 Mètres. Es werden sich hier auch noch einige Abschnitte und Rectificirungen ergeben, so daß das ehemalige Bett des St. Cyr auf etwa 4850 Mètres verringert werden wird. 4850 –

Summirt man nun die einzelnen Längen:

AB =	7500 M.
BC =	3672 –
CD =	8444 –
DE =	5820 –
EF =	7610 –
FG =	4630 –
GI =	4850 –
	42526 –

so ist die ganze Entwickelung nach den beabsichtigten Rectificationen

AI = 42 . 526 Mètres.

§ 47. Von den verschiedenen Zuflüssen. 1°. Der Zufluß von St. Martin, im Plane durch die Buchstaben IK bezeichnet*), wird 3 M. obere Breite, 1 M. Tiefe, und 1 M. Breite im Grunde haben. Die Länge derselben innerhalb der Sumpfgegend ist etwa

Latus 42530 –

*) Diese, wie auch die vorhergehenden Buchstaben sind den Specialplänen entnommen und fehlen auf der betreffenden Figurentafel VII, sind aber sehr leicht und ohne Mißverständniß durch den Leser selbst zu ergänzen. Anmerk. d. Uebersetzers.

580 M., und verringert sich durch Correcturen ꝛc. auf 550 M.; von denen auszubessern sind . . . . . . 150 M.
dagegen neu zu arbeiten . . . . 400 –

§ 48. 2°. Der Zufluß von Chevroux. Dieser Bach, durch BL im Plane bezeichnet, wird dieselben Dimensionen haben, wie der vorige, — seine Entwickelung wird eine Gesammtlänge von 1600 M. haben, von denen zu bessern sind . . . . 640 –
und neu zu machen . . . . 960 –

§ 49. 3°. Der Zufluß des Manoir. Der Zufluß des großen Manoir, von der Mühle la Rousse bis zum Damme des Teiches des großen Manoir, welche Entfernung im Plane durch BM bezeichnet ist. Dieser Canal wird 4 M. obere Breite, $1^{m},30$ Tiefe und $1^{m},04$ Breite im Grunde haben. Dieser erstere Theil mit einer Entwickelung von ungefähr 4600 Mètres wird auf circa 4300 M. verringert, von denen zu bessern sein werden . 2900 –
und neu zu machen . . . . 1400 –

Von diesem Punkte (M) bis zu den Quellen des Pallud, bei Punkt N, wird der Bach $3^{m},50$ obere Weite, $1^{m},05$ Tiefe, und $1^{m},40$ Breite im Grunde haben. Dieser zweite Theil hat eine Längenentwickelung von 2400 M. und wird auf etwa 2200 M. reducirt, von denen zu bessern . . . . 1720 –
und neu zu machen sind . . . . 480 –

Von den genannten Quellen an bis zu denen des großen Crézan, mit O bezeichnet, wird das Bett des Baches 2 M. obere Breite, $0^{m},50$ Tiefe und 1 M. Breite im Grunde haben. Dieses letzte Stück ist gänzlich zu reinigen und zu reguliren, und hat eine Längenentwickelung von etwa . . . . 2000 –

Latus 10650 –

Transport	10650 M.

§ 50. 4°. Der Zufluß des Chandour. Der im Plane mit CP bezeichnete Zufluß des Chandoux wird 3m,50 obere Weite, 1 M. Tiefe und 1m,50 Breite im Grunde haben. Seine Entwickelung beträgt etwa 1600 M. und wird auf etwa 1500 M. reducirt werden, von

denen zu bessern sind	1060 –
und neu zu machen	440 –

§ 51. 5°. Der Fluß Talvane, von Punkt D an, bis zu Punkt Q, der unterhalb der Quellen von Penniciaux liegt, wird 4 M. obere Breite, 1m,30 Tiefe und 1m,40 Breite im Grunde haben. Dieser erste Theil, von ungefähr 5060 M., wird auf etwa 4800 M. reducirt wer-

den, von denen zu bessern sind	3400 –
und neu zu machen	820 –

Vom Punkte Q bis zum Punkte R wird der Bach von Cessy 3,50 M. obere Breite, 1 M. Tiefe, und 1,50 M. Breite im Grunde haben. Die Länge QR ist ungefähr 1260 M. und wird auf 1150 M. verringert werden,

wovon zu bessern sind	330 –
und neu zu machen	820 –

Vom Punkte R bis zum Punkte S wird der Fluß 3 M. obere Breite, 1 M. Tiefe, und 1 M. Breite im Grunde haben. Die ganze Länge dieses Stückes ist ungefähr 3850 M. und wird auf etwa 3500 M. reducirt,

von denen zu bessern sind	2300 –
und neu zu machen	1200 –

§ 52. 6°. Zufluß der Motte. Der Zufluß oder Bach der Motte, im Plane durch UV bezeichnet, wird an seiner Einmündung 3 M. obere Breite haben, 1 M. Tiefe und 1 M. untere Breite, und wird bis zu der

Latus	21020 –

Transport 21020 M.

Gränze der Sumpfniederung sich fortschreitend vermindern bis zu einer oberen Breite von 1,50 M., 0,50 M. Tiefe und 0,50 M. Breite im Grunde. Seine Entwickelung beträgt etwa 3600 M. und wird auf 3400 M. verringert, von denen zu bessern sind . . . . 400 –
und neu zu machen . . . . 3000 –

§ 53. 7. Zufluß der Crotte von Ciez. Dieser Zufluß wird mit einer oberen Weite von 2,50 M., einer Tiefe von 0,80 M. und einer Breite im Grunde von 0,80 M. anfangen, und unmerklich bis zu seiner Quelle oberhalb Ciez seine obere Breite auf 1 M., seine Tiefe auf 0,30 M. und seine untere Breite auf 0,40 M. vermindern. Die Längenentwickelung von c. 5000 M. wird sich auf 4500 M. verringern, und es bleiben hiervon auszubessern ꝛc. . . . . 500 –
dagegen neu zu machen . . . . 4000 –

§ 54. 8°. Zuflüsse von Guillier und Germenté. Diese Zuflüsse haben ihre Mündungen in den Nohain in den mit a und F bezeichneten Punkten und kommen in die Sumpfniederungen bei den Punkten X und Z. Sie werden, ein jeder, 2,50 M. obere Breite, 0,90 M. Tiefe und 0,70 M. Breite im Grunde haben. Ihre vereinte Länge ist etwa 2000 M., welche zu bessern und zu reguliren sind; . . . . 2000 –

§ 55. 9°. Der Bach Trailong. Dieser Bach vereinigt sich mit dem von St. Cyr unterhalb der Stadt Entrains im Punkte G, und wird hier anfänglich 3 M. obere Breite, 1 M. Tiefe und 1 M. Breite im Grunde haben; — im Punkte X wird er mit einer oberen Weite

Latus 31500 –

Transport 31500 M.

von 1,50 M. enden, mit einer Tiefe von 0,50 M. und einer unteren Breite von 0,50. Die ganze Längenentwickelung ist zu bessern, zu reguliren; sie beträgt . . 3000 –

Der Gesammtbetrag der Längen der verschiedenen Zuflüsse des Rohain ist danach . . . . = 34500 –

Von den Vorgräben, den sekundären Ableitungs- und Abzugsgräben.

§ 56. Die verschiedenen Klassen von Abzugsrinnen und Gräben werden folgendermaßen eingetheilt werden:

1°. In Rinnen oder Gräben, a a bezeichnet, die 3 M. obere Breite, 1 M. Tiefe, 1 M. untere Breite haben müssen. Die Gesammtlänge dieser Art von Gräben ist etwa 17865 M., von denen auf den Gränzen der Sumpfniederung an alten Gräben zu reinigen und zu bessern sein werden etwa . . . . 3000 –

und neu auszuwerfen . . . . 14865 –

2°. In Rinnen oder Gräben, b b bezeichnet, welche 2 M. obere Oeffnung, 0,60 M. Tiefe und 0,80 M. untere Breite haben sollen. Ihre ganze Länge ist 56741 M., wovon an alten Gräben wieder herzustellen und zu bessern sind . . . . 28990 –

und ganz neu zu machen . . . . 27751 –

3°. In Abzugsgräben, c c bezeichnet, welche 1,50 M. obere Weite, 0,50 M. Tiefe und 0,50 M. untere Breite haben sollen. Ihre Gesammtlänge beträgt 148115 M., wovon zu bessern und zu reguliren bleiben etwa . 34595 –

und neu zu machen . . . . 113520 –

4°. In Vorgräben, welche den Dämmen des Flusses anliegen und der Klasse b b angehören; sie haben

Latus 222721 –

	Transport	222721 M.
eine Gesammtlänge von 35600 M. und es sind neu zu machen	. . . .	35600 –
Die Gesammtlänge der Hülfsgräben ist danach	. . .	258321 –

§. 57. Dämme. Der Fluß Rohain wird eingedämmt werden von den Eisenwerken von Bailly und l'Eminence an bis zur Mühle l'Eveque. Die Dämme werden parallel mit dem Flusse überall da angelegt werden, wo die Flußränder nicht eine natürliche Höhe von 2,50 M. über dem Grunde des Canals haben. Im Mittel werden diese Dämme 4 M. Basis, 2 M. obere Breite und 1 M. Höhe, die Böschungen daher eine Neigung von 45 Graden haben.

Diese Dämme werden in der Entfernung eines Mètre von beiden Ufern des Flusses angelegt, und die Vorgräben ebenfalls in einer Entfernung von 1 M. von den Dämmen ausgehoben.

Die Länge nun der anzulegenden Dämme wird zusammen betragen 35600 M.

Man sieht ein, daß die Punkte des Zufließens für die Vorgräben, wie auch die Zahl und die Lage der Schutzbretter oder Schleusen, welche die Wasser zurückhalten oder sie in die Abzugscanäle leiten sollen, erst schließlich bestimmt werden können, nachdem der Durchschnitt des zum Hüttenbetriebe nöthigen Wassers geregelt worden ist. Erst nach diesen wichtigen Operationen wird man die Wassermengen kennen, deren man sich zur Bewässerung mit Nutzen bedienen kann. So wie ein Theil dieser Ausgaben den sie verlangenden Eigenthümern zur Last fallen wird, ebenso wird dies auch mit der Construction und Anlage der Zahl von zugehörigen Abflüssen der Fall sein, die zur Berieselung nöthig sind, sowohl an den Umfassungsgräben und den Seitengräben, als an den Flüssen und Bächen; — man kann in dieser Beziehung nicht eher als nach der Aufnahme der Parcellen irgend Etwas bestimmen, nach der genauesten Kenntniß der Ausdehnung des Terrains, das für die Bewässerung empfänglich ist, und der Wassermenge, über die man zu diesem Behufe verfügen kann.

§ 58. Böschungen. Die Böschungen der Anschüttungen wie der Einschnitte, der Dämme wie der Canäle und der Rampen an den anzulegenden Brücken, werden eingeschnitten oder gebildet auf einer allgemeinen und einförmigen Neigung von 45 Graden. Die einzigen Böschungen der Gräben oder Canäle, welche Lagen flüchtigen Sandes, torfhaltiges Terrain und Moraststellen durchziehen, oder welche Dämme oder Kunstbauten tragen sollen, werden auf einer Neigung von 60 Graden angelegt, da sie Bekleidung erhalten müssen.

§ 59. Anschüttungen. Gemeiniglich werden die Anschüttungen der Canäle und Dämme mit den in der Nähe liegenden Erdaushebungen bewirkt, welche zum Theil aus den alten Gräben herrühren, zum Theil aus neuen Canalarbeiten oder aus den Regulirungen, und da, wo diese Erdaushebungen nicht hinreichen würden oder sich weiter als 3 Relais (das Relais zu 30 Mètres gerechnet) entfernt befänden, würde man Erdreich oder Sand und Kies auf denjenigen Punkten nehmen, die zuvor schon dem Unternehmer durch den die Arbeiten Leitenden bezeichnet sein müßten.

Der Ueberschuß des Erdreichs aus den Ausstichen und Regulirungen wird zur Anfüllung der alten eingehenden Canäle benutzt, oder in deren Ermangelung nach den am tiefsten liegenden Stellen der benachbarten Sumpfniederungen gezogen und dort vertheilt und eingeebnet, um so viel als thunlich die hohlen Stellen, tiefern Becken u. s. w. zu füllen und zu nivelliren, welche sich bis auf 3 Relais Entfernung von den Canälen befinden. Alles dies wird nach den dem Unternehmer bei der Ausführung gemachten Vorschriften ausgeführt, und zu dem in den Nachweisungen angegebenen mittleren, durch die Adjudication modificirten, Preise.

§ 60. Berasung. In den Theilen, welche an den Kunstbauten liegen, werden die Böschungen der Aufschüttungen mittelst einer Bekleidung befestigt, und zwar mit horizontalen Lagen von Rasen, die mit dem Spaten gestochen und die oberen so gegen die unteren zurück-

gezogen werden, daß sie eine Böschung von mindestens 60 Graden bilden.

§ 61. Bepflanzungen. Die Ränder des Flusses können auf Kosten der Eigenthümer bepflanzt werden, etwa mit einer doppelten Reihe Weiden oder Pappeln, so gestellt, daß die erstere Reihe auf der Mitte der inneren Böschungen der Dämme, die andere auf der Mitte der äußeren Böschungen zu stehen kommen.

Die Weiden werden 2, die Pappeln 3 Mètres Abstand von einander haben. Auf den Wunsch der Eigenthümer wird, wenn die Jahreszeit es erlaubt, eine solche Bepflanzung unmittelbar nach Beendigung der Arbeiten geschehen können.

Es werden diese Pflanzungen nicht nur die Eigenthümer in wenigen Jahren für die zur Verbreiterung des Flusses und zur Anlage von Dämmen und Vorgräben abgetretenen Terrains entschädigen, sondern auch das Erdreich und die Flußränder fest machen.

§ 62. Wichtige Bemerkungen.

1°. Der Unternehmer wird nicht aus den Augen verlieren, daß man bei der Feststellung der Dimensionen für die weiter oben aufgezählten Canäle und Dämme, und bei der Berechnung der daraus sich ergebenden Erdausshebungen vorausgesetzt hat, daß der natürliche Boden genau den Linien des Gefälles der Canäle oder Abzugsgräben, die der beigefügte Plan enthält, parallel sei. Es wird indeß vorkommen, daß mehrfache Einbiegungen des Terrains diese Parallelität stören. Daraus folgt, daß allein die Dimensionen des unteren Grundes der Canäle und Rigolen beständig dieselben bleiben müssen, ebenso wie der Böschungswinkel gegen diese Sohle der Gräben 2c. In Gemäßheit dieser Betrachtungen werden die Erdarbeiten, sowohl der alten, als auch der neuen Canäle, nach ihrer Ausführung ausgemessen, um Irrungen zu vermeiden und die endgültige Rechnung des Unternehmens festzustellen.

2°. Alle alten beibehaltenen Canäle, welche zu reinigen, zu bessern und zu reguliren sind, werden in den betreffenden Nachweisungen

als zu drei Viertheile gefüllt angenommen; deshalb werden diese Canäle als neue gemessen und allgemein $\frac{1}{4}$ in Abzug gebracht, ohne daß der Unternehmer eine Preiserhöhung beanspruchen, noch auch eine Preisverminderung sich gefallen lassen dürfe.

3°. Die Erdarbeiten werden mit dem Hauptcanale des Flusses Nohain beginnen, von der Mühle l'Eveque an; sie können gleichzeitig an den Mühlen La Rousse und La Brétine unterhalb Donzy und an der Brücke bei Couloutre beginnen: d. h. die Erdarbeiten werden in vier Hauptsectionen eingetheilt, welche gleichzeitig an den bezeichneten Punkten eröffnet werden können.

4°. Nach der Ausführung des Hauptcanals des Flusses Nohain wird man die Canäle der Hauptzuflüsse jeder Section in Angriff nehmen, und nach und nach die Umfassungsgräben und die Abzugsgräben der verschiedenen Ordnungen a, b, c etc., indem man dabei bedenkt, daß man in dem ersten Jahre nur einen Theil dieser letzteren Gräben und Rinnen ausführen und für das folgende Jahr diejenigen übrig lassen muß, welche von einer geringeren Nothwendigkeit zu sein scheinen. Man wird dann bereits eine genaue Kenntniß von jeder Oertlichkeit und von der Wirkung der zuerst angelegten Gräben gewonnen haben und die unnützen und überflüssigen ebensowohl als auch die unzureichenden und schlecht gelegenen kennen.

5°. Es gibt endlich gegenwärtig noch mehrere Gräben, die keinen nützlichen Zweck haben und unterdrückt werden müssen; man wird sie in ihrem jetzigen Zustande lassen, und erwarten, daß sie mit der Zeit allmälig sich ausfüllen werden.

Titel II. Verschiedene Brücken.

Brücken erster Ordnung, die auf den Vicinalstraßen anzulegen sind. (S. Tafel VIII).

§ 63. Die Gemeinden wünschen zu dem Baue verschiedener Brücken auf den Vicinalwegen zu concurriren, und es ist die Noth-

wendigkeit erkannt worden, eine ziemlich große Anzahl von größeren und kleineren Brücken sowohl über den Nohain, als auch über dessen Nebenflüsse und über gewisse Abzugsgräben, die nach Bedürfniß ausgehoben oder breiter gemacht worden sind, zur Erleichterung der Exploitirung anzulegen, d. h. also zur Ausführung der Ernten, zur Passage für das Vieh über das entwässerte Terrain, endlich zur Communication zwischen und zu den Deboucheen nach den auf den beiden entgegengesetzten Seiten der Sumpfniederungen gelegenen Dörfern und Städten. Die ersten und wichtigsten, welche in der Folge in Mauerwerk ausgeführt werden können, sind vier an der Zahl und kommen nach den Mühlen L'Eveque und Moc, auf den Vicinalweg von St. Martin nach Villiers und nach der Mühle La Rousse zu liegen.

Diese Brücken werden rechtwinkelig zur Axe des Flusses Nohain angelegt, und haben an ihren Enden eine Rampe, welche die Dämme und Vorgräben deckt und eine Neigung von (4 Grad 7 Minuten) = 4°7′ gegen den natürlichen Boden hat, was einer Neigung von 75 Millimètres auf den Mètre gleich kommt.

Jede Brücke wird 4 Mètres breit sein und 15 Mètres Längenspannung über den Fluß haben; jede Rampe wird 8 Mètres lang und eben so breit wie die Brücke sein.

Jede Brücke wird also aus drei zusammenhängenden Stücken (drei Brückentheilen) in Zimmerung bestehen, welche kommen:

1°. über den Fluß, auf fünf Reihen von Pfählen, welche 3^{m},83 von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind;

2°. über die Rampen, auf drei anderen Reihen von Pfählen von 2^{m},50 Abstand von Mitte zu Mitte.

Jede Reihe wird aus vier Pfählen bestehen, die in Intervallen von 1^{m},35 von Mitte zu Mitte eingeschlagen sind. Die Uferpfähle werden 0^{m},25 im Gevierte haben, mit Ausnahme der Eckpfähle an den Pfahlreihen des mittleren Theiles der Brücke, welche 0^{m},30 haben werden. Die der Rampen haben 0^{m},20 im Gevierte. Die Pfähle des Ufers und die der Pfahlreihen erhalten eine Kappe (einen Holm) von 0^{m},25 im Gevierte.

Alle Pfähle, die in den Canal des Flusses zu stehen kommen (20 an der Zahl), werden mit einem Schuhe von Gußeisen versehen; sie werden mit einer Ramme von 300 Kilogrammen Gewicht so tief als möglich eingetrieben, und dringen, wie man annimmt, ungefähr 2 Mètres tief in die Erde ein.

Jeder Brückenbelag wird aus vier Balken von $0^{m},30$ im Gevierte, die $1^{m},10$ von einander abstehen, zusammengesetzt, — auf ihnen ruht eine Lage von $0^{m},10$ dicken Bohlen. Dieselben haben $0^{m},25$ Breite und ragen über die äußeren Balken hinaus. Sie werden mit einer Lage Kies und Sand von 25 Centimètres Dicke bedeckt, und diese Bedeckung durch Bordbalken von $0^{m},15$ bis $0^{m},20$ im Gevierte festgehalten.

Jede Bohle wird gerade auf die Balken durch 2 Eisennägel von 18 Centimètres Länge, die Balken und die Bordbalken werden durch Schraubenbolzen befestigt. Dies wird im Ganzen 248 Eisennägel zur Befestigung der Bohlen erfordern. Durch den Unternehmer werden zur Befestigung von Bohlen, Balken und Bordbalken 104 Kilogrammes Eisen geliefert werden, das gut geschweißt, weich und nicht spröde sein muß.

Die Aufschüttungen der Rampen bis zu dem natürlichen Boden hin, also auf 20 Mètres von jedem Ende der Brücke gerechnet, werden lagenweise gemacht, mit je $0^{m},25$ Dicke, sorgfältig gerammt und mit einer Böschung von $1\frac{1}{2}$facher Basis auf 1fache Höhe (oder mit andern Worten: mit $1\frac{1}{2}$facher Anlage) versehen, durch eine Bekleidung mit Rasen, ähnlich, wie weiter oben ausgeführt worden, fest gemacht. Endlich werden die Böschungen der Dämme, zehn Mètres aufwärts und ebensoviel abwärts einer jeden Brücke, gleichfalls mit Rasen bekleidet.

§ 64. Eine ähnliche Brücke, mit einer Pfahlreihe weniger, wird, wie vorgeschrieben, auf dem Vicinalwege von Sully nach les Granges angelegt, mit einer Dimension von 11 Mètres über den Hauptcanal des Flusses.

§ 65. Fünf Brücken, die in Allem der beschriebenen ersten in der Construction gleichen, aber zwei Reihen Pfähle weniger haben, werden anglegt:

die erste an den neuen Mühlen, auf dem Vicinalwege von Donzy nach Pouilly;

die zweite auf dem Vicinalwege von Chancelay nach Berger;

die dritte an der Mühle les Cabets;

die vierte an der Furt les Cabets; und

die fünfte auf dem Wege von Bailly nach St. Colombe.

Die Pfahlwerke dieser letztgenannten Brücken werden neun Mètres Abstand von einander haben.

Brücken zweiter Ordnung. (S. Tafel VIII.)

§ 66. Es wird für die Passage der Vicinalwege über den Nohain zwischen Donzy und Entrains nöthig werden, acht Brücken zweiter Ordnung und verschiedener Dimensionen anzulegen. Die drei hauptsächlichen werden an die Furt von Châtre, bei La Motte auf dem Wege von Donzy nach Ciez, und nach La Crotte zur Verbindung dieses Weilers mit der Stadt Perroy gelegt werden.

Diese Brücken werden alle rechtwinkelig gegen den Lauf des Nohain gelegt, und eine Breite von 4 Mètres über dem Flusse haben. Eine jede wird aus zwei Pfahlreihen und einer Brückendecke in Zimmerung bestehen. Diese letztere wird auf einer Pfahlreihe, die in der Mitte steht, ruhen, und $7^m,50$ Länge haben.

Die Pfähle, Pfahlreihen, Bohlen, Balken und Bordbalken endlich werden von derselben Dicke und Breite sein wie die der Brücken erster Ordnung, und sich nur in der Länge davon unterscheiden. Das Nähere darüber gibt die Figurentafel VIII.

§ 67. Zwei andere Brücken, die den drei letzten ähnlich sind, aber eine Oeffnung von nur 6 Mètres über dem Flusse haben, werden, die erste bei la Garde, auf dem Wege von Donzy nach Entrains, und die andere bei der oberen Walkmühle angelegt.

§ 68. Drei andere Brücken endlich, in Allem den vorigen ähnlich, aber mit einer Oeffnung über dem Flusse von nur 5 Mètres, werden angelegt:

die erste an der großen Planche auf dem Vicinalwege von Menestreaux nach Ciez;

die zweite an den salzhaltigen Sümpfen von Menestreaux und

die dritte an der Furt von Neronde auf dem Vicinalwege von Neronde nach Menou.

Brücken dritter Ordnung.

§ 69. Auf den Vicinalwegen, welche die hauptsächlichsten Zuflüsse des Nohain und die Betriebscanäle der an denselben Bächen liegenden Usinen 2c. überschreiten, werden fünf und dreißig Brücken dritter Ordnung angelegt werden. Die ersten, 14 an der Zahl, werden placirt:

1) an dem künstlichen Abflußcanale der Mühle l'Eveque;

2) an dem Abflußcanale der Mühle von Moc;

3) „ „ „ „ „ „ La Rousse;

4) an dem Zuflusse Manoir, zwischen den Meierhöfen von Faveret;

5) an dem äußersten Ende des Famboux-Sumpfes, auf dem Wege von Sully nach Poigny;

6) unterhalb des Dammes am Teiche des großen Manoir;

7) gegenüber von Fontenoy;

8) gegenüber dem Schlosse les Granges;

9) an dem Canale der Neuen Mühle, für den Vicinalweg von Pouilly nach Donzy;

10) auf demselben Wege, gegenüber der Meierei von Vernoy;

11) an dem Canale von les Forges;

12) an dem Canale von Neronde;

13) über die Talvane gegenüber dem Gehöfte von Lamoignon;

14) an den Eisenwerken von Lamberon.

Diese Brücken werden sämmtlich 4 Mètres Fahrbahn haben, und 4 Mètres Weite über den Canal. Eine jede wird auf zwei Reihen Pfählen mit 4 Mètres Abstand ruhen, und jede Reihe aus 4 Pfählen von 20 Centimètres im Gevierte und von 2^m,50 Länge bestehen, die in Intervallen von 1^m,35 von Mitte zu Mitte mittelst vierarmiger Stampfen bis auf 1^m,50 unter der Sohle des Canals eingerammt sind.

Jede Reihe von Pfählen wird in der Höhe von 1 Mètre über der Sohle des Canals (oder Grabens) mit einer Kappe (Holm) von 0^m,20 Geviert auf 4^m,75 Länge gekrönt.

Die Brückendecke wird auf vier Balken von 25 Centimètres im Gevierte und 5 Mètres Länge, in 1^m,10 Entfernung von einander, ruhen.

Die Brückendecke wird 5 Mètres lang sein und aus an einander stoßenden Bohlen von 10 Centimètres Dicke auf 4^m,50 Breite gebildet werden.

Bei der Construction dieser Brücken werden, um die Bordbalken anzuziehen, acht eiserne Zapfen angewendet, von 0^m,36 Länge.

Die Bohlen werden durch zwei eiserne Bolzen von 0^m,18 Länge an die Balken befestigt.

§ 70. Es werden 21 andere Brücken, ähnlich den vorigen, nur mit einer Oeffnung von bloß 3^m,50, an folgenden Punkten gebaut:

1) auf dem Wege von Moc nach Pouilly;
2) über den Bach von St. Martin;
3) über den Bach von Chevreux für den Vicinalweg von St. Martin nach St. Quentin;
4) über denselben Bach, neben der Mühle La Rousse;
5) über den Chandoux-Bach unterhalb Sully-La-Tour;
6) gegenüber von Les Fontaines;
7) über den Canal der Eisenhütten von Bailly;
8) in der Mitte des Teiches des großen Manoir;
9) über die Talvane bei der Furt von Foulon;
10) über denselben Fluß an der Furt von Poinçon;

11) und 12) für den Zugang zu den Sümpfen von La Motte und den Vicinalweg von Donzy nach Ciez;

13) und 14) über die Sümpfe von Châtre und Perroy;

15) und 16) über die Sümpfe von La Crotte bis Ciez;

17) bei Les Patouilles;

18) bei den salzhaltigen Sümpfen von Menestreaux;

19) in dem Teiche der Neuen Mühlen von Entrains;

20) und 21) in der Mitte der Teiche von St. Cyr und Trailong.

Brücken vierter Ordnung.

§ 71. Auf den Landwegen, über die Canäle und Wassergräben zweiter Ordnung, wird die Zahl von 50 kleineren Brücken von 2½ bis 2 Mètres Oeffnung, mit einer Bahn von 2^{m},50, nöthig werden. Die hauptsächlichsten werden zu liegen kommen bei Pallu, Crézan, La Crotte, am Bache von Ciez, am Gillier-Bache, am Bache von Germenté, an den Teichen von St. Cyr und Trailong; die übrigen an denjenigen Punkten, welche als die geeignetsten zur Ausbeutung der Sumpfniederungen erscheinen.

Jede dieser Brücken wird durch zwei Reihen Pfähle mit 2^{m},50 Abstand getragen, und jede Reihe aus drei Pfählen bestehen, und durchaus denen ähnlich sein, die im vorigen Abschnitte behandelt worden sind. Das Geviert beträgt 0^{m},20. Jede Reihe wird durch eine Kappe von 0^{m},20 im Gevierte auf 3^{m},25 Länge gekrönt.

Die Brückendecke wird durch drei Balken von 25 Centimètres im Gevierte und 3^{m},25 Länge getragen, welche um 1^{m},50 über der Sohle des Canals sich erheben.

Der Belag wird eine Länge von 3^{m},25 haben und aus an einander stoßenden Bohlen von 0^{m},10 Dicke bei 3^{m},25 Länge bestehen. Auf jeder Seite des Belags werden Bordbalken von 0^{m},15 im Gevierte placirt, zwischen denen eine Bahn von 2^{m},50 bleibt. Die Bordbalken und Bohlen werden befestigt, wie dies im vorigen Artikel gesagt worden.

Brücken fünfter Ordnung.

§ 72. Auf den Canälen und Gräben letzter Ordnung werden etwa 50 andere kleine Brücken, unter sich ähnlich, an die für den Verkehr innerhalb der Sumpfniederungen günstigsten Punkte gelegt, und so wie die vorigen construirt, mit Ausnahme nachfolgender Modificationen:

Die Länge jeder Brücke, der Balken, der Bordbalken und der Brückendecke wird 4^{m},50 haben. — Für die specielleren Nachweise beziehen wir uns auf die beigefügten Risse, welche die allgemeinen Anordnungen sowohl als auch die Art der Construction anzeigen, welche nur für die Längenausdehnungen Variationen erfahren können, wovon der Unternehmer bei Zeiten benachrichtigt werden wird, insofern manche Gräben eingehen können, manche neu angelegt werden müssen, und dies auf die kleineren Brücken ebenfalls influirt.

§ 73. Zimmerung.

Alle angewendete Zimmerung wird in Eichenholz mit alter Rinde, von geradem Wuchse, ohne Gruben, Splint oder fehlerhaften Ast und nicht in den Fasern durchschnitten sein. Es wird scharfkantig behauen, zugerichtet und abgebunden. Die Abbindungen werden durch Holznägel befestigt.

Kein Stück Zimmerung kann verbraucht werden, ehe es nicht zuvor von der mit Ueberwachung, Direction und Annahme der Arbeiten betrauten Person angenommen worden ist.

In dem Preise der Façons sind das Behauen und das Zuspitzen der Pfähle einbegriffen, und bleiben also dem Unternehmer zur Last.

Der Adjudicirte wird sich für das Abbinden, den Schnitt und die Anordnung der verschiedenen Theile der Zimmerung an die certificirten Risse und an die ihm gegebenen Befehle und Anweisungen halten, und endlich an die Regeln der guten Zimmermannskunst.

§ 74. Eisenwerk. Es ist weiter oben gesagt, daß der Unternehmer nur ein als gut anerkanntes Eisen nehmen darf, kein sprödes, sehr festes, und es aus den besten Eisenhütten des Landes zu entnehmen hat. Die Eisenarbeiten, das Schmieden und Façonniren, geschehen genau nach dem Anschlage und den gegebenen Anordnungen.

§ 75. Bemerkungen.

Es versteht sich von selbst, daß jede Fehlerhaftigkeit oder eine jede Abweichung von dem Anschlage oder von den gegebenen Befehlen, sei es in der Ausführung, sei es in den Dimensionen oder der Güte der Materialien, die man während oder nach dem Gebrauche derselben erkennt, zu einer reinen und einfachen Verwerfung das Recht gibt, oder zu der Zerstörung der gemachten Arbeit und zur Wiederaufnahme derselben nach dem Anschlage, und zwar auf Kosten des Unternehmers.

Titel III. Regelung der Wasser von Mühlen und Usinen, die an dem Rohain und seinen Zuflüssen liegen, und Unterdrückung zweier Usinen.

§ 76. Die Gesellschaft für Entwässerungen wird unmittelbar nach Erlangung der Concession die Regelung der Wasser der verschiedenen Hüttenwerke 2c. nachsuchen, und sie den ortsüblichen Maßregeln unterwerfen. Wir denken, daß durchschnittlich das Wasser über dem Untergrunde $0^{m},80$ hoch stehen müsse.

Wir haben die allgemeine Lage sowohl der Schutzbretter, als des verschiedenen Untergrundes zu prüfen gehabt, und erkannt, daß alle Sohlen der Canäle und die Ausflüsse ohne Unterschied in mehr oder weniger entfernten Zeitpunkten aufgehöht worden sind, ganz zuwider den gebräuchlichen Reglements, die im Bezirke in Kraft sind. Dies muß nothwendiger Weise unterdrückt werden in dem allgemeinen Interesse, und um in schicklicher Art die Entwässerung der Sümpfe, die zum Theil durch die bestehenden Usinen verursacht werden, bewirken zu können.

Der Kiesgrund z. B. an der Mühle von Neronde, in der Gemeinde Meneſtreaux, ist willkürlich um etwa 1 Mètre höher gelegt; gewisse andere sind dies um $0^{m},50$.

§ 77. Die Existenz der Mühlen von Châtre und Blancgateau, in der Gemeinde Donzy, erscheint unverträglich mit einem guten Entwässerungssysteme. Der Hauptstrom hat kein anderes Bette als das Gerinne dieser Mühlen, welches auf einer Terrasse von geringer Breite und um etwa $1\frac{1}{2}$ Mètre über den natürlichen Boden erhöht liegt, bei den geringsten Wasseranschwellungen übertritt und beständig die an ihm liegenden Wiesen überschwemmt. Unabhängig von dem geringsten Wachsen des Wassers sickern die also aufgehöhten Wasser beständig durch die Uferränder durch und unterhalten ununterbrochen einen Ueberfluß an still stehendem Wasser in den anliegenden Wiesen, das nur durch unterirdische Infiltration oder durch Verdunstung allmälig verzehrt wird. Die Gesellschaft wird sich also auch mit den Eigenthümern jener Usinen zu vernehmen, die Mühlen anzukaufen und dann zu unterdrücken haben, in Gemäßheit des Gesetzes für Expropriationen aus Gründen öffentlicher Nützlichkeit, wenn keine gütliche Einigung erzielt werden kann.

§ 78. Wehre (Déversoirs). Die Zahl der Wehre, welche uns unerläßlich scheinen, ist 17, unabhängig von der Unterdrückung der Mühlen, von denen die Rede war, — nämlich:

1) zur Regulirung der Wasser der Mühle l'Eveque.
2) zur Regulirung der Wasser der Mühle Moc;
3) zur Ableitung des Nohain zwischen den Mühlen von Moc und Paillet, oberhalb des Dorfes Nohain;
4) zur Regelung der Wasser der Mühle la Rousse;
5) zur Regelung der Wasser der Mühle St. Quentin;
6) für die Mühlen von Sully-la-Tour;
7) für die Hüttenwerke von Verger;
8) für die Mühle les Cabets;
9) für die Mühle la Brétine;
10) für die Mühle la Motte;
11) für die Mühle les Paillards;
12) für die Walkmühle Marbré;
13) für die oberhalb der letzteren gelegene Walkmühle;

14) für die Usinen von Lamberon an der Talvane;
15) für die Mühle von Neronde;
16) für die Mühlen von Sauvigny;
17) für die Mühle von Poinçon.

§ 79. Alle diese Wehre werden massiv und in behauenen festen Steinen construirt. Die unteren Lagen stromabwärts werden mit Brettverpfählungen befestigt, in Bohlen, welche $1^m,50$ unter den Grund des Canals eingerammt sind. Diese Bohlen werden $0^m,15$ Dicke auf $0^m,25$ Breite haben.

NB. Da das örtliche Maß des Durchschnitts oder Wasser-Prismas, welches den Gerinnen der Mühlen zu geben ist, streitig sein könnte, nach den zu vertheilenden Wasservolumina's und der Höhe der Schutzbretter die Dimensionen von Basis und Höhe der Wehre aber sich richten müssen, so werden wir uns hier begnügen, in dem abschätzenden Anschlage den laufenden Preis eines Kubikmeters Mauerwerk zu geben, der auf die Construction der gedachten Wehre anwendbar ist; — die Feststellung des Preises kann erst erfolgen, wenn man die wirklichen Dimensionen kennt.

Der Unternehmer wird folglich benachrichtigt, daß er gehalten sei, die genannten Wehre nach den ihm zu guter Zeit übergebenen Rissen auszuführen, und zwar nach dem laufenden Preise für den Kubikmeter, wie der durch den Rabatt der Adjudication veränderte Anschlag es festsetzt.

Die an den Canälen der Usinen zu machenden Erdarbeiten sind annähernd nach der Einuferung des Hauptflusses abgeschätzt auf:

neu zu construiren	1540 M.
zu bessern, zu vertiefen ꝛc.	12565 –

Die genannten Mühlcanäle werden eine mittlere Tiefe von $0^m,50$ und eine mittlere Breite von 4^m haben.

Titel IV. Bedingungen des Zuschlags.

Artikel 1.

§ 80. Die in dem gegenwärtigen Anschlage begriffenen Arbeiten werden in fünf Loosen, klassenweise, und an den Mindestforderns

den, in Gegenwart des Herrn L., Ingenieur und Ober-Geometer der allgemeinen Gesellschaft für Entwässerungen, vor Herrn B., Notar der Stadt Donzy, in Donzy zugeschlagen werden.

§ 81. Das erste Loos umfaßt alle Erdarbeiten, welche durch die Neu-Anlage, so wie durch die Reinigung, Regulirung und Besserung der Canäle, Gräben und Dämme zwischen den Mühlen l'Eveque und la Rousse, die den Gemeinden St. Quentin und St. Peré zugehören, nothwendig werden.

§ 82. Das zweite Loos wird alle Erdarbeiten unterhalb Donzy, von der Mühle la Rousse an, und an den Zuflüssen des großen Manoir, des Chevreux und Chandoux umfassen.

§ 83. Das dritte Loos begreift alle Erdarbeiten zwischen Donzy und der Brücke bei Couloutre, die Zuflüsse Talvane, la Motte und la Crotte.

§ 84. Das vierte Loos umfaßt die weiteren Erdarbeiten oberhalb der Brücke bei Couloutre.

§ 85. Das fünfte Loos endlich umfaßt alle Kunstbauten im Allgemeinen und die Erdarbeiten, die in Ausgrabungen oder Rampen bestehen, welche für die Zugänge wie für die Ausführung der Arbeiten nöthig erachtet werden.

Artikel 2.

§ 86. Es werden nur Männer von Fach, patentirte Unternehmer und solvente Leute zur Adjudication der Arbeiten zugelassen.

Jeder Concurrent muß seine Zahlungsfähigkeit rechtfertigen, eine gültige Caution stellen oder hypothekarische Sicherheit gewähren, — sowohl was die Sicherheit der ihm übergebenen Geldmittel, als auch die Gewähr einer guten Ausführung seines Contracts anbetrifft.

Artikel 3.

§ 87. Der Unternehmer wird seine Arbeiten beginnen, sobald er die Anweisung dazu von den Geranten der Entwässerungs-Gesellschaft erhält, und unter der Leitung der ihm bezeichneten Person.

Er wird sie ohne Unterbrechung bis zur gänzlichen Beendigung fortsetzen, welche für die Erdarbeiten innerhalb zweier Jahre, und für die Kunstbauten innerhalb dreier Jahre stattahben muß, unbeschadet der Artikel 1992 und 2270 des Civil-Gesetzbuchs.

Artikel 4.

§ 88. Er wird auf seine Kosten alle Piketpfähle und den Arbeitslohn zum Traciren und Auspfählen der Arbeiten übernehmen.

Artikel 5.

§ 89. Er wird gehalten sein, alle im Anschlage erwähnten Arbeiten den Plänen, Profilen und Erhebungen gemäß, die ihm zugestellt werden, auszuführen, so wie die besondern Instructionen und Risse zu befolgen, die der mit der Führung der Arbeiten beauftragte Agent ihm geben wird; — Alles nach dem Preise der Adjudication, ohne Anspruch auf eine zusätzliche Entschädigung.

Artikel 6.

§ 90. Wenn irgend welche Veränderungen und Unterdrückungen im Laufe der Arbeiten für nöthig erkannt werden sollten, so ist derjenige, dem die Ausführung zuerkannt worden, verbunden, sich dem zu fügen; und es wird ihm ein getrennter Etat gemacht werden für die Vermehrung oder Verminderung nach dem Preise der durch die Adjudication verificirten Nachweisungen, — ohne daß er, im Falle einer Reduction, eine Entschädigung für etwa gehabte Kosten beanspruchen könne.

Artikel 7.

§ 91. Alle Monate wird man die gemachten Arbeiten nachmessen und nach dem Resultate der durch den Conducteur für diese

Arbeiten hergestellten Messung, wird in Donzy bei dem Notar B. dem Unternehmer eine Contozahlung gemacht, welche nicht neun Zehntheile des Preises der ausgeführten Arbeiten übersteigen darf. Das letzte Zehntheil, unter dem Titel einer Garantie, wird erst nach der gänzlichen Abnahme der Arbeiten gezahlt. — Die Arbeiten, welche als fehlerhaft oder als gegen die Vorschriften des Anschlags ausgeführt erkannt werden, werden nicht in den Etat der Contozahlung aufgenommen und auf Kosten des Unternehmers neu gemacht. Die provisorische Abnahme der Arbeiten erfolgt, sobald dieselben sämmtlich beendet sind.

Die Garantiefrist zwischen der provisorischen und der endgültigen Abnahme wird sechs Monate betragen; während dieser Frist wird der Unternehmer die Arbeiten in gutem Stande erhalten, so daß sie keinen Schaden oder keinerlei Verderben seit der letzten Abnahme zeigen.

Artikel 8.

§ 92. Der Unternehmer darf keinen Aftervertrag über seine Arbeiten machen, weder ganz noch theilweise, unter der Gefahr, auf seinen Contract Verzicht leisten zu müssen, und eine neue Adjudication eintreten zu sehen.

Artikel 9.

§ 93. In dem Falle, wo er nicht beständig bei den Arbeiten sein kann, hat er sich durch einen intelligenten Mann vertreten zu lassen, der die genügende Ermächtigung besitzt, statt seiner zu handeln.

Artikel 10.

§ 94. Er wird, ohne Recurs gegen die allgemeine Gesellschaft für Entwässerungen, alle Schäden bezahlen, welche die Gewinnung, der Transport und die Deponirung der Materialien veranlaßt, die Anlage von Baustellen, Batardeaux, Schöpfpumpen, Betriebswege, und endlich alle vorübergehenden Entschädigungen, welche dem Unter-

nehmer zur Last fallen. Er muß auf seine Kosten die Magazine, Fuhrwerk, Wagen, Baugerüste, Handwerkszeug aller Art liefern, und alle die kleinen Nebenausgaben bestreiten, welche ein Unternehmer überhaupt nie in Rechnung stellen darf.

Artikel 11.

§ 95. Er wird die auf seine Adjudication bezüglichen Kosten baar bezahlen, wie: öffentliche Bekanntmachungen, Ausrufe, Affichen, ferner die Expedition, die Anschläge, die abschätzende Nachweisung, Pläne, Risse, Adjudications-Protokolle, Stempelgebühren und Eintragsgebühren, — welche Kosten auf die Summe von 800 Francs festgesetzt bleiben.

Ferner wird er, als Honorar der Adjudication, ein Procent des Hauptwerthes derselben bezahlen.

Artikel 12.

§ 96. In Betreff der Ausführung des gegenwärtigen Vertrags wird der Unternehmer sich durch das Factum der Adjudication dem unterwerfen, was für die Unternehmer öffentlicher Arbeiten durch die Gesetze und Bedingungen vom 30. Juli 1811 vorgeschrieben ist.

Geschehen zu Nevers, den 1. Juni 1830

Für den Ober-Geometer der allgemeinen Gesellschaft für Entwässerungen.
gez. L.

Titel V. Sümpfe des Nohain.

Entwurf zu verschiedenen Erdarbeiten und mehrerer Brücken in Zimmerung.

Ungefähre Detailberechnung. Erster Theil.

Artikel 1.

Ausmessung der Erdarbeiten.

Eintheilung der Canäle					Reducirte Maße			Partielle Produkte der Canäle		Summa
Lauf. Nr.	Namen des Bachs	Bezeichnung im Plane	Allgemeine Dimensionen: zu bessern 3/4	Allgemeine Dimensionen: neu zu machen	Länge	Breite	Tiefe	zu bessern 3/4	neu zu machen	
		AB	3990	3510	7500	13,50	1,50	60598,10	71082,50	
		BC	860	2816	3676	9,50	1,50	9191,—	40128,—	
		CD	3700	4744	8444	7,50	1,50	31219,—	53370,—	
1	Fluß Nohain . .	DE	1500	4320	5870	5,50	1,50	9281,—	35640,—	M. C.
		EF	1480	6130	7610	4,50	1,50	7492,50	41377,50	390269,30
		FG	1530	3100	4630	4,—	1,50	6885,—	18600,—	
		GH	2000	—	2000	2,—	1,—	3000,—	— —	
		HI	2850	—	2850	1,50	0,75	2404,70	— —	
2	Bach von St. Martin . . .	IK	150	400	550	2,—	1,—	225,00	1100,00	1325,00
3	Bach von Chevraux	BL	640	960	1600	2,—	1,—	960,00	1920,00	2880,00
4	Zufluß des großen Manoir . . .	BM	2900	1400	4300	2,70	1,30	8134,00	4914,00	
		MN	1720	480	2200	2,45	1,05	3318,50	1234,80	18726,30
		NO	2000	—	2000	1,50	0,50	1125,00	— —	
5	Zufluß von Chandoux	CP	1060	440	1500	2,50	1,—	1987,50	1100,00	3087,50
		DQ	3400	1400	4800	2,70	1,30	8950,50	4914,00	
6	Fluß Talvane .	QR	330	820	1150	2,50	1,—	618,75	2050,00	20883,25
		ST	2300	1200	3500	2,—	1,—	1950,—	2400,00	
7	Bach la Motte .	UV	400	3000	3400	1,50	0,75	337,50	3375,00	3712,50
8	= = Grotte	EX	500	4000	4500	1,19	0,55	245,44	2618,00	2863,44
9	= von Gilliers und Germenté.	ay, FZ	2000	—	2000	1,60	0,90	2160,00	— —	2160,00
10	Bach von Trailong	G etc.	3000	—	3000	1,50	0,75	2531,25	— —	2531,25
11	Rinnen bezeichnet	a a	3001	14865	17866	2,—	1,—	4501,50	39730,—	44231,50
12	= =	b b	28990	27751	56741	1,40	0,60	18263,70	23310,84	41574,54
13	= =	c c	34595	113520	148115	1,—	0,50	12793,10	56750,—	69733,10
14	neue zu bessernde Mühlgerinne .	—	12265	1540	13805	4,—	1,50	55192,50	9240,—	64432,50
									Gesammtsumme aller Erdarbeiten	668400,18

Artikel 2.

Größere und kleinere Brücken.

Lauf. No.	Bezeichnung der Theile der Arbeit.	Reducirte Dimensionen.			Partielle Produkte	Summe
		Breite	Dicke	Länge		
	Brücke erster Ordnung.					
	(Artikel 9. des Anschlags.)					
1	Erdarbeit an Aufschüttung zu den Rampen	6,00	0,50	20	60	M. C. 60
2	Kies und Erde zur Brückendecke	4,30	0,20	15,50	12,40	M. C. 12,40
	Zimmerung.					
1	16 Pfähle von $4^m,60$ Länge auf $^{25}/_{25}$ Geviert	0,25	0,25	73,60	4,60	
2	4 Pfähle von $3^m,10$ Länge auf $^{30}/_{30}$ Geviert	0,30	0,30	12,40	1,12	
3	2 Bordbalken von $15^m,50$ Länge auf $^{20}/_{15}$ Geviert	0,20	0,15	31	0,93	
4	Kappen für die Ufer und Pfahlreihen von $^{20}/_{20}$ Geviert	0,20	0,20	25	1	
5	Balken für die Brückendecke von $^{30}/_{30}$ Geviert	0,30	0,30	62	5,58	
	Gesammtinhalt der vierkantigen Hölzer				13,23	M. C. 13,23
	Sägehölzer, an Bohlen, im Ganzen	4,50	0,10	15,50	6,98	6,98
	Eisenwerk.					
1	20 Schuhe in Gußeisen mit zackigem Schafte, ein jeder 10 Kilogramm wiegend	—	—	—	—	K. 200
2	8 eiserne Schraubenbolzen, zur Befestigung der Bordbalken, jeder 2 Kilogr. schwer	—	—	—	K. 16	
3	20 zackige Bolzen, um die Balken auf den Kappen zu befestigen, jeder zu 0,75 Kilogr. Gewicht	—	—	—	15	
4	124 Bolzennägel, zur Befestigung der Bohlen auf den Balken, jeder 0,25 Kilogr. schwer.	—	—	—	31	
	Totalgewicht des geschmiedeten Eisens	—	—	—	K. 62	K. 62
	Brücke erster Ordnung.					
	(Artikel 13. des Anschlags.)					
1	Erdarbeiten, wie oben	6	0,50	20	60	M. C. 60

Lauf. No.	Bezeichnung der Theile der Arbeit.	Reducirte Dimensionen. Breite	Dicke	Länge	Partielle Produkte	Summe
2	Cubischer Inhalt des Sandes	4	0,20	11,70	9,36	M. C. 9,36
3	Zimmerung, Gesammtinhalt des vierkantigen Holzes	—	—	—	10	M. C. 10
4	Gesägtes Holz.	4,50	0,10	11,70	5,16	M. C. 5,16
5	Geschmiedetes Eisen	—	—	—	50	K. 50
6	Schuhe von Gußeisen	—	—	—	5	K. 160
	Brücke erster Ordnung. (Artikel 14. des Anschlags.)					
1	Erdanschüttungen	—	—	—	—	M. C. 60
2	Sand, zur Bedeckung der Brücke	—	—	—	—	M. C. 6,28
3	Cubischer Inhalt des vierkantigen Holzes	—	—	—	—	M. C. 7
4	Cubischer Inhalt des gesägten Holzes . .	—	—	—	—	M. C. 3,53
5	Geschmiedetes Eisen.	—	—	—	—	K. 40
6	Schuhe von Gußeisen	—	—	—	—	K. 120
	Brücke zweiter Ordnung. (Artikel 15. des Anschlags.)					
	Zimmerung.					
1	Acht Pfähle von $2^{m},60$ Länge auf $^{25}/_{25}$	0,25	0,25	20,80	1,30	
2	4 Pfähle von $2^{m},60$ Länge auf $^{30}/_{30}$ . .	0,30	0,30	10,40	0,97	
3	2 Bordbalken von $7^{m},50$ Länge auf $^{20}/_{15}$	0,20	0,15	15	0,45	
4	Kappen der Ufer und der Pfahlreihen . .	0,20	0,20	26,80	1,07	
5	Balken der Brückendecke	0,30	0,30	28,80	2,59	
	Gesammtinhalt des vierkantigen Holzes				6,38	M. C. 6,38
	Gesägtes Holz.	4,50	0,10	7,50	3,38	M. C. 3,38
	Eisen.					
1	12 Schuhe von Gußeisen, ähnlich denen für Brücken erster Ordnung, gleichen Gewichts	—	—	—	—	K. 120

Lauf. No.	Bezeichnung der Theile der Arbeit.	Reducirte Dimensionen. Breite	Dicke	Länge	Partielle Produkte	Summe
2	6 eiserne Bolzen, selbes Gewicht, wie vorher	—	—	—	K. 12	
3	12 lange Nägel	—	—	—	9	
4	60 Bohlennägel	—	—	—	15	
	Totalgewicht des geschmiedeten Eisens	—	—	—	K. 36	K. 36
	Erdarbeiten.					
1	Anschüttungen für Rampen.	4,65	0,33	20	30,68	M. C. 30,68
2	Masse des Kieses und Sandes, zum Bedecken der Brücke.	4	0,20	8	6,40	M. C. 6,40
	Brücke zweiter Ordnung. (Art. 16. des Anschlags.)					
1	Vierkantiges Holz	—	—	—	—	M. C. 5,40
2	Gesägtes Holz	—	—	—	—	M. C. 2,90
3	Schuhe in Gußeisen	—	—	—	—	K. 120
4	Geschmiedetes Eisen.	—	—	—	—	K. 33,86
5	Erdanschüttungen	—	—	—	—	M. C. 30,68
6	Kiesmasse zur Bedeckung der Brücke. . .	—	—	—	—	M. C. 4,80
	Brücke zweiter Ordnung. (Artikel 17. des Anschlags.)					
1	Vierkantiges Holz	—	—	—	—	M. C. 4,88
2	Gesägtes Holz	—	—	—	—	M. C. 2,51
3	Schuhe in Gußeisen	—	—	—	—	K. 120
4	Geschmiedetes Eisen.	—	—	—	—	K. 31,72
5	Rampen-Anschüttungen	—	—	—	—	M. C. 30,68
6	Kies, zum Bedecken der Brücke.	—	—	—	—	M. C. 4

Lauf. No.	Bezeichnung der Theile der Arbeit.	Reducirte Dimensionen. Breite	Dicke	Länge	Partielle Produkte	Summe
	Brücke dritter Ordnung. (Artikel 18. des Anschlags.)					
	Vierkantiges Holz.					
1	8 Pfähle von 2m,50 Länge	—	—	20		
2	2 Kappen von 4m,75 Länge	—	—	9,50		
	Cubischer Inhalt bei 0,20 Geviert . .	0,20	0,20	29,50	1,18	
3	4 Balken von 5m Länge	0,25	0,25	20	1,25	
4	2 Bordbalken von 5m Länge	0,15	0,15	10	0,23	
	Gesammtinhalt des vierkantigen Holzes	—	—	—	2,66	M. C. 2,66
5	Gesägtes Holz zum Brückenbelag. . . .	4,50	0,10	5	2,25	M. C. 2,25
	Gesammtgewicht des Eisens	—	—	—	12,40	K. 12,40
	Erdarbeiten.					
1	Rampen-Anschüttungen	4	0,25	14	14	M. C. 14
2	Kies zur Bedeckung der Brücke.	4	0,25	5	3	M. C. 3
	Brücke dritter Ordnung. (Artikel 19. des Anschlags.)					
1	Vierkantiges Holz	—	—	—	—	M. C. 2,46
2	Gesägtes Holz	—	—	—	—	M. C. 2,03
3	Geschmiedetes Eisen	—	—	—	—	K. 11,40
4	Rampen-Anschüttungen	—	—	—	—	M. C. 14
5	Kies zur Bedeckung der Brücke.	—	—	—	—	M. C. 2,40
	Brücke vierter Ordnung. (Artikel 20. des Anschlags.)					
	Vierkantiges Holz.					
1	6 Pfähle von 2m,50 Länge und zwei Kappen von 3m,25	0,20	0,20	21,50	0,86	
2	3 Balken von 3m,25	0,25	0,25	9,75	0,60	
3	2 Bordbalken von 3m,25	0,15	0,15	6,50	0,14	
	Summe des vierkantigen Holzes	—	—	—	1,60	M. C. 1,60
4	Gesägtes Holz zum Bohlenbelag	3,25	0,10	3,25	1,06	M. C. 1,06

Lauf. No.	Bezeichnung der Theile der Arbeit.	Reducirte Dimensionen. Breite	Dicke	Länge	Partielle Produkte	Summe
	Eisen.					
1	6 Bolzen von 0,30 Länge	—	—	—	1,80	
2	26 Nägel für die Bohlen	—	—	—	6,70	
					K.	K.
	Summe des geschmiedeten Eisens	—	—	—	8,50	8,50
	Erdarbeiten.				M. C.	M. C.
1	Rampen-Anschüttungen	3,70	0,225	12	10	10
						M. C.
2	Kies zum Bedecken der Brücke	2,50	0,15	3,25	1,22	1,22
	Brücke fünfter Ordnung. (Artikel 21. des Anschlags.)					
	Vierkantiges Holz.					
1	6 Pfähle und zwei Kappen von 2^m,50 Länge	0,20	0,20	20	0,80	
2	3 Balken von 2^m,75	0,25	0,25	7,25	0,45	
3	2 Bordbalken von 2^m,75	0,15	0,15	4,50	0,10	M. C.
	Cubischer Inhalt der vierkantigen Hölzer	—	—	—	1,35	1,35
						M. C.
4	Gesägtes Holz	2,50	0,10	2,75	0,69	0,69
	Eisen.					
1	6 Bolzen von 0^m,30 Länge.	—	—	—	1,80	
2	22 Bohlennägel	—	—	—	5,50	K.
	Gesammtgewicht des geschmiedeten Eisens	—	—	—	7,30	7,30
	Erdarbeiten.					M. C.
1	Rampenanschüttungen	3,20	0,20	10	6,40	6,40
						M. C.
2	Kies zur Brückenbedeckung	2,50	0,15	2,50	0,94	0,94
	Wehre. (Artikel 27. des Anschlags.)					
	Die Zahl derselben ist vorläufig auf 17 bestimmt, die Theile der Construction werden später bestimmt werden.					
	Schutzbretter und Ausflüsse zur Berieselung.					
	Sie fallen den Eigenthümern, welche sie wünschen, zur Last; ihre Zahl ist unbekannt.					

Lauf. No.	Benennung der Arbeiten.	Elemente der Rechnung	Preis einer Einheit
	Artikel 1. Erdarbeit.		
		Fr. C.	
1	Ein Kubikmeter auszuheben	0,20	
	Ein Viertel mehr für die Partien unter dem Wasser . .	0,05	
	Für den Wurf mit der Schaufel	0,05	
	Nebenkosten und Werkzeug	0,05	
	$^1/_{10}$ Benefiz	0,04	Fr. C.
	Preis des Kubikmeters mit der Schaufel	0,39	0,39
2	Für die mit der Hacke zu bearbeitenden Theile, ein Mehr von	0,05	
	Preis des Kubikmeters mit der Hacke.	0,44	0,44
3	Für die mit der Steinhaue zu bearbeitenden Stücke, ein Mehr von	0,10	
	Preis des Kubikmeters mit der Steinhaue. . . .	0,54	0,54
4	Für Laden und Karren nach einem Relais, ein Mehr von	0,10	
		0,64	0,64
5	Dasselbe für zwei Relais	0,05	
		0,69	0,69
6	Dasselbe für drei Relais	0,05	
	Im Ganzen	0,74	0,74
7	Preis des Kubikmeters Kies, — Ausgaben, Aufladen, Karren rc.	2,20	2,20
	Artikel 2. Zimmerung.		
1	Preis eines Pfahls, mit Schuh von Gußeisen, mit zackigem Schafte, 10 Kil. schwer, das Kil. à 0Fr. 60 C.	6	
2	Einrammen durch 20 Menschen à 1 Fr. 50 C., welche 6 Pfeiler täglich einrammen können, für das Einrammen eines Pfahls also	5	
3	Zurichten, Legen, Behauen und Zuspitzen.	2,50	
4	Lieferung an Werkzeugen, Aufsicht, Fuhrlohn, Gerüste	1,35	
		14,85	
5	Ein Zehntheil Benefiz	1,50	
	Im Ganzen	16,35	16,35
	Detaillirte Berechnung eines Kubikmeters vierkantiges Holz, das zu den Kunstbauten angewandt wird.		
1	Ankauf zur Stelle, Abgang beim viereckigen Behauen, und Behauen der Abbindungen.	60	
2	Abgang nach der Abvierung	3	
3	Façon, Legen und Abbinden.	7,50	

Lauf. No.	Benennung der Arbeiten.	Elemente der Rechnung	Preis der Einheit
		Fr. C.	
4	Kosten an Werkzeugen und Aufsicht	3,38	
		73,80	
5	1/10 Benefiz	7,38	Fr. C.
	Gesammt-Preis des Kubikmeters . . .	81,18	81,18
	Spezielle Berechnung eines Kubikmeters Sägeholz von 0m,10 Geviert; — zum Brückenbau benutzt.		
1	Ankauf und Transport zur Stelle, den Abgang eingerechnet	63	
2	Sägen, Behauen, Legen, Abbinden	25	
		88	
	1/20 für Aufsicht	4,40	
	Im Ganzen	92,40	
	1/10 Benefiz	9,24	
	Im Ganzen	101,64	101,64
	Artikel 3. Geschmiedetes Eisen.		
	Spezielle Berechnungen eines Kilogramms Schmiedeeisen, wie es zu den Kunstbauten angewandt wird.		
1	Lieferung, Transport, Façon, Legen, Verwendung, Werkzeuge.	1,15	
2	1/10 Benefiz	0,12	
	Preis im Ganzen	1,27	1,27
	Art. 4. Behauene Steine.		
	Berechnung eines Kubikmeters Mauerwerk in behauenen harten Steinen, zu den Kunstbauten angewendet.		
1	Aufsuchen und Aufgraben	1,50	
2	Förderung aus dem Steinbruche	25	
3	Behauen, Transport und Legen	14,50	
		41	
4	1/10 Benefiz	4,10	
	Gesammt-Preis des Kubikmeters . . .	45,10	45,10

Dritter Theil. Anwendung der Preise.

Lauf. No.	Benennung der Arbeiten.	Menge	Preis der Einheit	Partielle Produkte	Summen
	Art. 1. Erdarbeiten.				
1	Aushebungen, Anschüttungen mit Schaufel	M. C. 368,400,18	Fr. C. 0,39	Fr. C. 143,676,07	
2	Aushebungen mit Hacke . .	200,000	0,44	88,000	
3	Aushebungen mit Steinhaue	100,000	0,54	54,000	
4	Karren und Fortschaffen auf durchschnittlich 30 Mètres	668,400,18	0,10	66,840,02	
	Gesammt-Preis, nach dem mittlern Preise des Kubikmeters	—	0,52	352,516,09	Fr. C. 352516,09
	Art. 2. Kunstbauten.				
	Brücke erster Ordnung. (Artikel 9. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter behauenen Holzes und Pfähle	13,23	81,18	1074,01	
2	Kubikmeter gesägten Holzes zu Bohlen	6,98	101,64	709,45	
3	Kubikmeter Rampenanschüttungen	60	0,52	31,20	
4	Kubikmeter Kies zur Brückenbedeckung	12,40	2,20	27,28	
5	Kilogr. geschmiedeten Eisens	62	1,27	78,74	
6	Pfähle mit Schuhen . . .	20	16,35	327	
	Summe für eine Brücke	—	—	2247,68	
	Und für 4 ähnliche Brücken	—	—	—	8990,72
	Brücke erster Ordnung. (Artikel 13. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantigen Holzes und Pfähle	10	81,18	811,80	
2	Kubikmeter gesägten Holzes .	5,16	101,64	524,46	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	60	0,52	31,20	
4	Kubikmeter Kies zur Brückenbedeckung	9,36	2,20	20,59	
5	Pfähle mit Schuh	16	16,35	261,60	
6	Kilogr. geschmiedeten Eisens	50	1,27	63,50	
	Im Ganzen	—	—	1713,15	1713,15
	Latus				363,219,96

Lauf. Nr.	Benennung der Arbeiten.	Menge	Preis der Einheit	Partielle Produkte	Summen
		M. C.	Fr. C.	Fr. C.	Fr. C.
	Transport				363,219,96
	Brücke erster Ordnung. (Artikel 14. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantigen Holzes und Pfähle	7	81,18	568,26	
2	Kubikmeter gesägten Holzes .	3,53	101,64	358,79	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	60	0,52	31,20	
4	Kubikmeter Kies für Brückenbedeckung	6,28	2,20	13,82	
5	Pfähle mit Schuh	12	16,35	196,20	
6	Kilogr. geschmiedeten Eisens	40	1,27	50,80	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	1219,07	
	Und für fünf ähnliche Brücken	—	—	—	6095,35
	Brücke zweiter Ordnung. (Artikel 15. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz und Pfähle	6,38	81,18	517,93	
2	Kubikmeter gesägtes Holz. .	3,83	101,64	343,54	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	30,68	0,52	15,95	
4	Kubikmeter Kies zur Brückenbedeckung	6,40	2,20	14,08	
5	Pfähle mit Schuh	12	16,35	196,20	
6	Kilogr. geschmiedeten Eisens	36	1,27	45,72	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	1133,42	
	Und für acht ähnliche Brücken	—	—	—	9067,36
	Brücke zweiter Ordnung. (Artikel 16. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz zu Balken und Pfählen . .	5,40	81,18	438,37	
2	Kubikmeter gesägtes Holz. .	2,90	101,64	294,76	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	30,68	0,52	15,95	
4	Kubikmeter Kies zur Brückendecke	4,80	2,20	10,56	
5	Pfähle mit Schuh	12	16,35	196,20	
6	Kilogr. geschmiedeten Eisens	33,86	1,27	42,90	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	998,74	
	Und für zwei ähnliche Brücken	—	—	—	1997,48
	Latus				380,380,15

Lauf. No.	Benennung der Arbeiten.	Menge	Preis der Einheit	Partielle Produkte	Summen.
		M. C.	Fr. C.	Fr. C.	Fr. C.
	Transport				380,380,15
	Brücke zweiter Ordnung.				
	(Artikel 17. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz und Pfähle	4,88	81,18	396,16	
2	Kubikmeter gesägtes Holz. .	2,51	101,64	255,12	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	30,68	0,52	15,95	
4	Kubikmeter Kies zur Brückendecke	4	2,20	8,80	
5	Pfähle mit Schuh	12	16,35	196,20	
6	Kilogr. geschmiedeten Eisens	31,72	1,27	40,28	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	912,51	
	Und für drei ähnliche Brücken	—	—	—	2737,53
	Brücke dritter Ordnung.				
	(Artikelt 18. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz	2,66	81,18	215,94	
2	Kubikmeter gesägtes Holz. .				
3	Kubikmeter Rampenanschüt-	2,25	101,64	228,69	
	tung				
4	Kubikmeter Kies zur Brücken-	14	0,52	7,28	
	decke	3,40	2,20	6,60	
5	Kilogr. geschmiedeten Eisens	12,40	1,27	15,75	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	474,26	
	Und für 35 ähnliche Brücken	—	—	—	16599,10
	Brücke dritter Ordnung.				
	(Artikel 19. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz	2,46	81,18	199,70	
2	Kubikmeter gesägtes Holz .	2,03	101,64	206,33	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	14	0,52	7,28	
4	Kubikmeter Kies zur Brückendecke	2,40	2,20	5,28	
5	Kilogr. geschmiedeten Eisens	11,40	1,27	14,48	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	433,07	
	Und für 21 ähnliche Brücken	—	—	—	9094,47
	Latus				408,811,25

Lauf. No.	Benennung der Arbeiten.	Menge	Preis der Einheit	Partielle Produkte	Summen.
		M. C.	Fr. C.	Fr. C.	Fr. C.
	Transport				408,811,25
	Brücke vierter Ordnung. (Artikel 20. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz	1,60	81,18	129,89	
2	Kubikmeter gesägtes Holz .	1,06	101,64	107,74	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	10	0,52	5	
4	Kubikmeter Kies zur Brückendecke	1,22	2,20	2,68	
5	Kilogr. geschmiedeten Eisens	8,50	1,27	10,80	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	256,11	
	Und für 25 ähnliche Brücken	—	—	—	6402,75
	Brücke fünfter Ordnung. (Artikel 21. des Anschlags.)				
1	Kubikmeter vierkantiges Holz	1,48	81,18	120,15	
2	Kubikmeter gesägtes Holz. .	0,69	101,64	70,13	
3	Kubikmeter Rampenanschüttung	6,40	0,52	3,33	
4	Kubikm. Kies zur Brückendecke	0,94	2,20	2,07	
5	Kilogr. geschmiedeten Eisens	7,30	1,27	9,27	
	Im Ganzen für eine Brücke	—	—	204,95	
	Und für 25 ähnliche Brücken	—	—	—	5123,75
	Wehre. (Artikel 27. des Anschlags.)				
	Die Zahl und der Preis derselben sind nur annähernd bestimmt auf	17	2500	42,500	42500
	Schutzbretter und Ausflüsse zur Berieselung der Wiesen.				
	Lage, Zahl und Preis lassen sich erst nach der Entwässerung bestimmen, und werden den Eigenthümern zur Last fallen, welche sie wünschen .	—	—	—	
	Latus				462,837,75

Lauf. No.	Benennung der Arbeiten.	Menge	Preis der Einheit	Partielle Produkte	Summen.
		M. C.	Fr. C.	Fr. C.	Fr. C.
	Transport				462,837,75
	Verschiedene Entschädigungen.				
	An Terrain, Zerstörung und Arbeitsunterbrechung der Mühlen und Usinen, ungefähr	—	—	—	125,000
	Administrationskosten.				
	Aufnahme der Pläne, Profile, Untersuchungen, Sondirungen, Klassificirung des Bodens, Controlirung, Leitung der Arbeiten, Verwaltungskosten, Abnahme der Arbeiten, Reisen ꝛc.. circa	—	—	—	50,000
	Summe der Ausgaben in etwa 4 Jahren	—	—	—	637,837,75
	Interessen der Ausgaben für etwa 2 Jahre	—	—	—	63,783,78
	Betrag der von der Gesellschaft zu leistenden Vorschüsse	—	—	—	701,621,53
	Summe der Abschlagszahlung	—	—	—	70,378,47
	Gesammtsumme der Ausgaben	—	—	—	772,000,00

in Worten sieben hundert und zwei und siebenzig Tausend Francs.

Nevers, den 1. Juni 1830.

Angefertigt durch den Ober-Geometer der allgemeinen Gesellschaft für Entwässerungen.

gez. L.

Anmerkung des Verfassers. Es erschien überflüssig, diesen Piecen, welche die Entwässerung der Sümpfe des Rohain betreffen, die allgemeinen und speziellen Pläne, die zu dem Anschlage der Kosten gehören, beizufügen, da sie zu ausgedehnt sind und ihre Mittheilung die Kosten des Buchs sehr erhöhen würde. Der zweite Band der „praktischen Geodäsie" wird außerdem hinreichende Muster bieten, nach denen dergleichen Pläne aufgenommen werden können, und die Klassificirung und Abschätzung der Terrains zu geschehen hat.

Wir beschließen darum hier dieses wichtige Kapitel unseres Anhangs zum ersten Bande.

Tabelle der Maßstäbe.

Zum Gebrauche der Beamten des Brücken- und Wege-Baues.

No. des Maßstabs	Verhältniß desselben zum dargestellten Gegenstande.		Anwendung	
	in Zahlen	in Maßen	zu Mustern	zu Plänen
1	$\frac{1}{1}$	1 Cent. zu 1 Cent.	Für den Guß.	Schablonen, Profile und Details der Construction.
2	$\frac{1}{2}$	1 - - 2 -	Kleine Werkzeuge, kleine Maschinentheile.	do.
3	$\frac{1}{5}$	1 - - 5 -	Die kleinen Maschinen, oder die aus kleinen Stücken bestehen; — (Winden, Maschinen zum Abschneiden der Pfähle ꝛc.)	do. Für die Details an Eisenbeschlägen, Angeln ꝛc. von Thoren, Schleusen, Drehbrücken ꝛc.
4	$\frac{1}{10}$	1 - - 1 Decim.	Die Maschinen von mittlerer Größe; deren Stücke eine größere Stärke haben. (Haspelwinden ꝛc.)	do.
5	$\frac{1}{20}$	1 - - 2 -	Die großen Maschinen, deren Theile fein sind; (Dampfmaschinen ꝛc.) Die Thore an Schleusen, — Pfahlreihen und Pfeiler für Brücken, Gewölbe ꝛc.	do. und für die Risse zum Behauen der Steine und Hölzer.
6	$\frac{1}{50}$	1 - - 5 -	Die großen aus starken Stücken bestehenden Maschinen. (Krahne, Rammen ꝛc.) Die kleineren Brücken, wie Brückenbogen, Archen, Schleusen, mit einer einzigen Spannung von höchstens 25 Mètres.	do. und zu den Details der Schleusen von einer größeren Breite, so wie zu architektonischen Details.
7	$\frac{1}{100}$	1 - - 1 Mètre	Brücken und Schleusen, deren ganze Länge zwischen 25 und 50 Mètres ist.	do.

8	$\frac{1}{200}$	1 – – 2 Mètres	Brücken und Schleusen von über 50 Mètres Länge.	do. Dem allgemeinen Plane in einem 4fachen Maßstabe wird die Zeichnung irgend eines Theils, wie einer Arche, eines Feldes, einer Schleusen-Passage, beigefügt. Die Quer-Profile der Straßen, Canäle, Flüsse, der Querwälle, — Entwürfe der Architectur.
9	$\frac{1}{500}$	1 – – 5 –	. . . .	Pläne der Communen, deren Länge nicht über 500 M. Pläne der Felderwermessung.
10	$\frac{1}{1000}$	1 – – 10 –	. . . .	Längen-Profile der Wegestrecken, welche die Communen durchschneiden; der Flußbetten. Pläne der Communen von 500—1000 M.
11	$\frac{1}{2000}$	1 – – 20 –	. . . .	Längen-Profile der Straßen-Projekte, Canäle und Flußregulirungen. Pläne der Canal-Projekte, und der Gemeinden von 1000 bis 2000 M. Länge.
12	$\frac{1}{5000}$	1 – – 50 –	. . . .	Pläne der Straßen-Projekte. — Pläne der Gemeinden von 2000 bis 5000 M. Länge.
13	$\frac{1}{10000}$	1 – – 100 –	. . . .	Specialkarten der Flüsse und Canäle. Pläne der Gemeinden über 5000 M. Länge.
14	$\frac{1}{20000}$	1 – – 200 –	. . . .	Specialkarte der Straßen und Ströme. — Generalkarte eines Kantons.
15	$\frac{1}{50000}$	1 – – 500 –	. . . .	Karte eines oder mehrerer Kantone von nicht mehr als 50000 M. Länge.
16	$\frac{1}{100000}$	1 – – 1 Kilom.	. . . .	Karte mehrerer Kantone bis zu 100000 M. Länge.
17	$\frac{1}{200000}$	1 – – 2 –	. . . .	Karte eines Departements.
18	$\frac{1}{500000}$	1 – – 5 –	. . . .	Karte mehrerer Departements bis zu 500000 M. größter Länge. — Die große Uebersichtskarte von Frankreich.
19	$\frac{1}{1000000}$	1 – – 1 Myriam.	. . . .	Kleine Uebersichtskarte von Frankreich.

Siebenter Abschnitt.

Ueber die Regenwasser und die (perennen) beständigen Wasser; — über die Wassermengen, welche ein Canal fortführen muß, der zur Aufnahme der auf eine gegebene Fläche fallenden Wasser bestimmt ist; — über die numerischen Werthe der Mengen, welche man als wirkliche Daten ansehen muß; — über die Ausmessung der fließenden Wasser, nebst einem Formulare, betreffend die Gestalt und Dimensionen der Querdurchschnitte der Canäle, welche zur Aufnahme der, großen Aenderungen unterworfenen, Wassermengen bestimmt sind.

Erstes Kapitel.

Regenwasser.

§ 97. Wir nennen Hauptaxe des Ausfließens die Längenaxe des leichtesten oder schnellsten Abflusses.

Die Hauptaxe des Ausfließens ergibt die Richtung des Mittel-Canals zur Fortführung der Regenwasser aus dem zu entwässernden Boden.

Es ist nützlich und selbst unerläßlich, in den Mittelcanal einen Theil der beständigen Wasser einfließen zu lassen, damit dieser Canal nicht oft trocken sei.

Man hat Hülfsgräben nöthig, um alle Regenwasser in den Mittelcanal zu führen; sie müssen mit diesem den kleinstmöglichen Winkel bilden, und wir können sie darum longitudinale Hülfsgräben nennen. Ihre Zahl variirt für jeden Boden und hängt von der Breite der Sumpfniederung oder der größeren oder geringeren Abschüssigkeit (im Sinne der Breitenausdehnung) ab.

§ 98. Um den Zuflußpunkt der longitudinalen Hülfsgräben zum Mittelcanale zu finden, gibt es folgende sehr einfache Regel:

Man denke von dem Ausgangspunkte (d. i. derjenige Punkt, wo man dem zufließenden Canale eine Biegung gibt, um ihn zum aufnehmenden Canale zu führen) eine Linie senkrecht zur Axe des aufnehmenden Canals, welche senkrechte Linie den Abstand oder die kürzeste Linie vom Biegungspunkte bis zur Axe bezeichnet; — man theile

die Zahl, welche das Gefälle auf eine Längeneinheit des aufnehmenden Canals ausdrückt, durch diejenige Zahl, welche das in ähnlicher Weise auf die Längeneinheit der kürzesten Abstandslinie, von der so eben die Rede war, bezogene Gefälle ausdrückt; der Quotient wird die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels sein, welchen mit dieser Linie des kürzesten Abstandes die gesuchte Richtung der vom Biegungs- zum Einflußpunkte gehenden Linien bildet.

Zweites Kapitel.

Beständige Wasser.

§ 99. Die Quellen an der Oberfläche der Sümpfe können angewendet werden, um Abfluß in den Mittelcanal und die Hülfsgräben zu geben. Die anderen Wasser müssen je nach der Localität in die Umfassungscanäle aufgenommen werden.

Wie nun auch die Canäle construirt sein mögen, so ist es unerläßlich, daß von dem Beginne ein und desselben Canals bis zu seiner Mündung hin die Schnelligkeit des Fließenden entweder wachse, oder doch wenigstens bei jeden zwei Punkten der Längenaxe für den höher gelegenen Punkt niemals stärker sei, als für den tieferen Punkt. Wenn nach der Beschaffenheit des Terrains dieser Unterschied in der Stromgeschwindigkeit zu fürchten ist, so muß man dem durch Wasserfälle oder kleine Kataraktcn entgegentreten. Soll der Canal schiffbar sein, muß man Schleusen statt der Wasserfälle wählen.

Solche Wasserfälle müssen wenigstens 2000 Mètres aus einander liegen. Man kann sich ihrer mit Nutzen bedienen, um den Canälen, wenn es nöthig ist, sehr schnelle Directions-Aenderungen zu geben. Unter diesen Wasserfällen muß man Aushöhlungen bewirken, die immer stagnirendes Wasser haben, und in welchen die durch den Strom fortgerissenen Steine und Grund sich ablagern, die man nachher wieder daraus entfernt.

Menge des Wassers, welche ein Canal, der zur Aufnahme der auf eine gegebene Fläche fallenden Wasser bestimmt ist, vertreiben muß.

§ 100. Das niederfallende Wasser verliert sich zum Theil durch Verdunstung und Einsickerung. Die Größe dieses Verlustes ist sehr schwer zu messen, da sie je nach der Oertlichkeit und der Bodenbeschaffenheit eine andere sein wird.

Die Berechnung der jährlichen Regenwasser muß nach den Beobachtungen, welche man an einigen, der zu entwässernden Gegend benachbarten, Punkten angestellt hat, angelegt werden. [Die mittlere Höhe der Regenmenge für Paris z. B. beträgt $0^m,49$.]

Man muß sich genaue Daten über die Regenmenge verschaffen, welche auf die zu entwässernde Bodenfläche fällt, und man stellt die Dimensionen der Canäle nach dem an der Bodenoberfläche fließenden Theile des an einem regnerischen Tage gefallenen Wasservolumens fest; man berechnet sie nach der Ausdehnung und Abschüssigkeit des Terrains, und nach der Zeit, welche dieses Quantum Regenwassers gebraucht, um in die Gräben und Canäle zu fließen, um zu verlaufen.

In außerordentlichen Fällen wird man der Möglichkeit ausgesetzt sein, eine augenblickliche Ueberfülle an Wasser zu haben.

Zur näheren Bestimmung wollen wir mit a die Terrainoberfläche bezeichnen, auf welche der Regen fällt, mit h die Höhe des in Einem Tage gefallenen Wasser-Prismas; mit $\frac{ah}{n}$ den durch Einsickerung verlorenen Theil Wassers, während die Verdunstung gleich Null angenommen wird; mit t die Zeit, welche hinreicht, daß das Wasser sich zu Einer Menge sammele.

Da $\frac{ah}{n}$ verloren geht, so ist das an der Oberfläche vereinte Wasser $= ah - \frac{ah}{n} = ah \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Während der Zeiteinheit würde der Verbrauch.

$$ah \cdot \left(\frac{n-1}{n \cdot t}\right)$$

sein, in der Voraussetzung, daß das Volumen des während einer gewissen Zeit angesammelten Flüssigen dieser Zeit proportionirt sei; — aber diese hypothetische Gleichförmigkeit des Anlangens der Wasser in dem Canale particularisirt die Frage also:

es ist $\underline{t'}$ ein solcher Zeittheil, daß die mit $\underline{q}$ bezeichnete während dieses Zeittheils angesammelte Wassermenge größer ist, als die während jedes andern Theils von t, welcher gleich t′ ist, angesammelte Quantität. Es muß also der Emissions-Canal für das Maximum $\frac{q}{t'}$ des Quantums während der Zeiteinheit t disponirt sein; und wenn man durch den Unbestimmten k das Verhältniß zwischen q und dem mittleren Produkte $\frac{n-1}{n} \cdot ah$ darstellt, und $\frac{t'}{q} = q'$ macht, so hat man die Formel

$$q' = \frac{(n-1)k}{nt} \cdot ah$$

Setzt man in diese Formel t, in Sekunden ausgedrückt, so wird q′ die Menge Wassers bezeichnen, welche der Emissions-Canal in einer Sekunde Zeit fortführen wird.

Die Quantität q also bestimmt habend, wird man, um Gestalt und Dimension des Canals zu erhalten, diese Quantität, vermehrt um das mit P bezeichnete Produkt der beständigen Wasser des Beckens für eine Sekunde in die folgende Gleichung setzen:

$$\omega^3 - \frac{x}{g \cdot i}(\alpha \omega q + \beta q^2) = o,$$

indem man $q = q' + p$ setzt, und in dem Falle, wo keine beständigen Wasser sind,

$$q = q'.$$

In dieser Gleichung bezeichnen

ω das Flächenmaß des Querdurchschnitts,

χ die Länge seines nassen Umfangs,

i die Abschüssigkeit oder das Gefälle;

α, β und g sind drei Constante, deren Werth der folgende ist:

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}000436 \\ \beta = 0{,}003034 \\ g = 9^{m}{,}8088 \end{cases}$$

oder die durch die Schwere verursachte Geschwindigkeit während Einer Zeiteinheit.

Viertes Kapitel.

§ 101. Die Größen $\underline{k}$, $\underline{h}$, $\underline{n}$ und $\underline{t}$ des vorigen Kapitels müssen nach jeder besondern Oertlichkeit a priori bekannt sein.

Den Coefficienten $\underline{k}$ kann man ungefähr gleich Eins annehmen.

$\underline{h}$, welches die Höhe des in Einem Tage gefallenen Wasser-Prisma's ist, kann nur nach den an Ort und Stelle gesammelten Erfahrungen gegeben werden. Nach den Erfahrungen kann man für eine große Zahl von Oertlichkeiten $\underline{n = 3}$ setzen. Für die Zeit $\underline{t}$ können nur die Beobachtungen an Ort und Stelle den Werth ergeben, denn es bedeutet $\underline{t}$ die Zeit, welche nöthig ist, damit die Molekule Wasser sich vereinigen, um schädliche Wirkungen hervorzubringen. Man nimmt allgemein diese Zeit zu 2 bis $2\frac{1}{2}$ Tagen an. Doch kann auch diese Annahme nach Localität und den Temperatur-Veränderungen wechseln.

Man müßte diese Werthe in die Gleichung

$$q' = \frac{(n-1)k}{nt} . ah$$

setzen.

Machen wir ein Beispiel für eine andere Annahme nach den auf die Sümpfe von Arles bezüglichen Piecen. Die Erfahrungen der Entwässerungs-Arbeiten hatten annähernd ergeben:

$$n = 2;\ h = 0^{m}{,}09;\ t = 691200'';\ k = 1;$$

daraus ergab sich

$$q' = 0{,}0000000651 . a.$$

Da a die Oberfläche ausdrückt, so wird q', wenn man für a den Werth einsetzt, die Wassermenge in Einer Sekunde ergeben.

Aus dieser Formel hat man folgende Regel gezogen: „Man multiplicire mit $6\frac{1}{2}$ den 10000sten Theil der Anzahl Hectaren, welche das Becken enthält, so wird das Resultat in Kubikmetern die Wassermenge ergeben, welche der Emissions-Canal in Einer Sekunde fortführen muß."

Wie wenig allgemeine und durchgängige Gültigkeit diese Regel hat, geht daraus hervor, daß Herr de Prony für die pontinischen Sümpfe fand, daß die Canäle so eingerichtet werden müßten, um für dieselbe Oberfläche eine dreifach größere Wassermenge fortzuführen.

Fünftes Kapitel.

Von der Ausmessung der fließenden Wasser.

§ 102. Erste Methode. Hat man den Vortheil, den Canal eingränzen und alle Wasser durch eine in dem Abschlusse angebrachte Schleusen-Oeffnung hindurchgehen zu lassen, ohne daß in dem oberen Theile des Bettes dadurch ein Austreten Statt findet, so kann man, von dieser Leichtigkeit Nutzen ziehend, die Ausmessung in folgender Weise machen:

Man wartet, bis das Wasser oberhalb des Abschlusses in einer ziemlich unveränderlichen Höhe stehe. Dann wird die Schleusen-Oeffnung eine Wassermenge fortführen (oder durchlassen), die gleich derjenigen ist, welche vor Herstellung der Eindämmung durch einen Querdurchschnitt des Canals ging.

Die Schleusen-Oeffnung oder der Mund des Ausflusses ist ein Parallelogramm, und es sind

ω = die Oberfläche dieses Mundes,

a seine Höhe, } $\omega = a\,b$
b seine Basis, }

k die Höhe des Wassers über seinem Mittelpunkte

$g = 9^{m},809$ oder die durch die Schwere verursachte Geschwindigkeit in 1 Sekunde,

q das Produkt des Ausflusses in Kubikmetern während 1 Sekunde.

Es ist dann:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{a} \left\{ \left(1 + \frac{a}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{a}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} \right\},$$

und da c der Coefficient ist, welcher der Zusammenziehung der Wasserader zugehört, so wird der gesuchte Werth von q durch die Gleichung gefunden:

$$q = A c \omega \sqrt{2gk}.$$

Bei'm ersten Blicke scheint es; als ob die Auswerthung des Faktors A lang und mühsam sei; aber diese äußersten Werthe sind innerhalb sehr enger Gränzen eingeschlossen. Es würde nämlich der größte Werth $A = 1$ sein, sobald man k in Bezug auf a als unendlich betrachtet, und wenn $\frac{k}{2a} = 1$, so würde der zweite Gränzwerth $A = 0{,}94281$ sein. Nimmt man hierfür nun auch $A = 1$, so ist der Fehler kleiner als 0,06.

Die verschiedenen Werthe nun von A, welche denen von $\frac{a}{2k}$ entsprechen, sind folgende:

Bei $\frac{a}{2k} = 0{,}0$ ist $A = 1{,}00000$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}1$ " $A = 0{,}99958$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}2$ " $A = 0{,}99832$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}3$ " $A = 0{,}99619$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}4$ " $A = 0{,}99312$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}5$ " $A = 0{,}98904$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}6$ " $A = 0{,}98383$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}7$ " $A = 0{,}97724$
" $\frac{a}{2k} = 0{,}8$ " $A = 0{,}96896$

$$\text{Bei } \frac{a}{2k} = 0{,}9 \text{ ist } A = 0{,}95828$$

$$\text{„ } \frac{a}{2k} = 1{,}0 \text{ „ } A = 0{,}94281.$$

Der Werth von q kann sich auch unter der Form geben:

$$q = \frac{2}{3} c b (H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) \sqrt{2g}.$$

H und h sind hierbei bezüglich die Höhe der Wasserfläche über den horizontalen unteren und oberen Seiten der Ausflußmündung. Um diese letztere Formel zur Berechnung bequem zu machen, hat de Prony in seiner „Ausmessung der fließenden Wasser" (jaugeage des eaux courantes) eine Tabelle der $\frac{3}{2}$ten Potenzen der Zahlen von 10 zu 10, von 1 bis 300 mitgetheilt.

Es bleibt der Zahlenwerth von c zu bestimmen, welches der aus der Zusammenziehung der Wasserader hervorgegangene Coefficient ist. Obschon sein Werth nicht constant ist, sondern von der Größe und Form der Mündungsöffnung abhängt, so kann man dennoch, ohne einen Irrthum von nachtheiligem Einflusse befürchten zu müssen, $c = 0{,}619$ annehmen. Bei Annahme dieses Werthes wird

$$c \sqrt{2g} = 2{,}74166 \text{ und}$$

$$\frac{2}{3} c \sqrt{2g} = 1{,}82777$$

sein. Setzt man diese Werthe nun in die Formeln der vorhergehenden Artikel, so hat man

$$q = 2{,}74166 . A \omega k^{\frac{1}{2}}. \text{ und}$$

$$q = 1{,}82777 . b . (H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}).$$

Die Linieneinheit ist der Mètre, die Zeiteinheit ist die Sekunde.

§ 103. Zweite Methode. Es ist eine Formel vorhanden, um das Produkt einer Wasserströmung zu messen, ohne irgend eine Hypothese über die Contraction der Wasserader zu machen. Diese Methode besteht in Folgendem.

Man construirt in dem auszumessenden Bache zwei Abschlüsse,

einen oberhalb, einen unterhalb, und den ersteren so, daß er augenblicklich mittelst eines Schutzbrettes geschlossen werden kann.

Sobald das fließende Wasser sich dergestalt gestellt hat, daß die Höhe des Wassers in dem Raume zwischen den beiden Abschlüssen, in dem sogenannten Schleusenfalle sich nicht mehr ändert, schließt man plötzlich die oberhalb gelegene Schleuse; das Wasser fährt fort, durch die untere Schleuse auszufließen, und seine Oberfläche senkt sich allmälig in dem Schleusenfalle, weil kein neues Wasser mehr zuströmt. Das Maß der Statt findenden Senkungen lehrt die Volumina ausgeströmten Wassers kennen, welche ihnen entsprechen, so daß, wenn man von dem Schließen der oberhalb gelegenen Schleuse anfängt, die verstrichenen Zeiten sind:

$$0,\ \tau,\ 2\tau,\ 3\tau, \ldots\ldots n\tau,$$ und

die Volumina ausgeflossenen Wassers, welche diesen Zeiten entsprechen, würden sein:

$$o,\ q',\ q'',\ q''', \ldots\ldots\ldots qn.$$

Um diese zu berechnen, würde man zuvor in den Schleusenfall mehrere Querdurchschnitte haben machen müssen, oder man hätte, zu größerer Genauigkeit, diesem Schleusenfalle durch Bretterverschälung eine prismatische Form geben können.

Nachdem diese verschiedenen Beobachtungen gemacht und registrirt sind, muß man das Volumen des Wassers berechnen, welches zuvor ausfloß. Es sei Q dieses Volumen, und n die Anzahl der gemachten Beobachtungen, dann hat man im Allgemeinen

$$Q = \frac{1}{\tau}\left(n.q_{,} - \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{q_{,,}}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.\frac{q_{,,,}}{3} - \ldots\ldots \pm \frac{qn}{2}\right)$$

Man erkennt, daß die Größen $q_{,}$, $q_{,,}$, $q_{,,,}$, mit den binomischen Coefficienten multiplicirt und alsdann durch die Reihe der natürlichen Zahlen dividirt sind.

Für eine Beobachtung hat man mithin

$$n = 1, \text{ und } Q = \frac{q_{,}}{\tau};$$

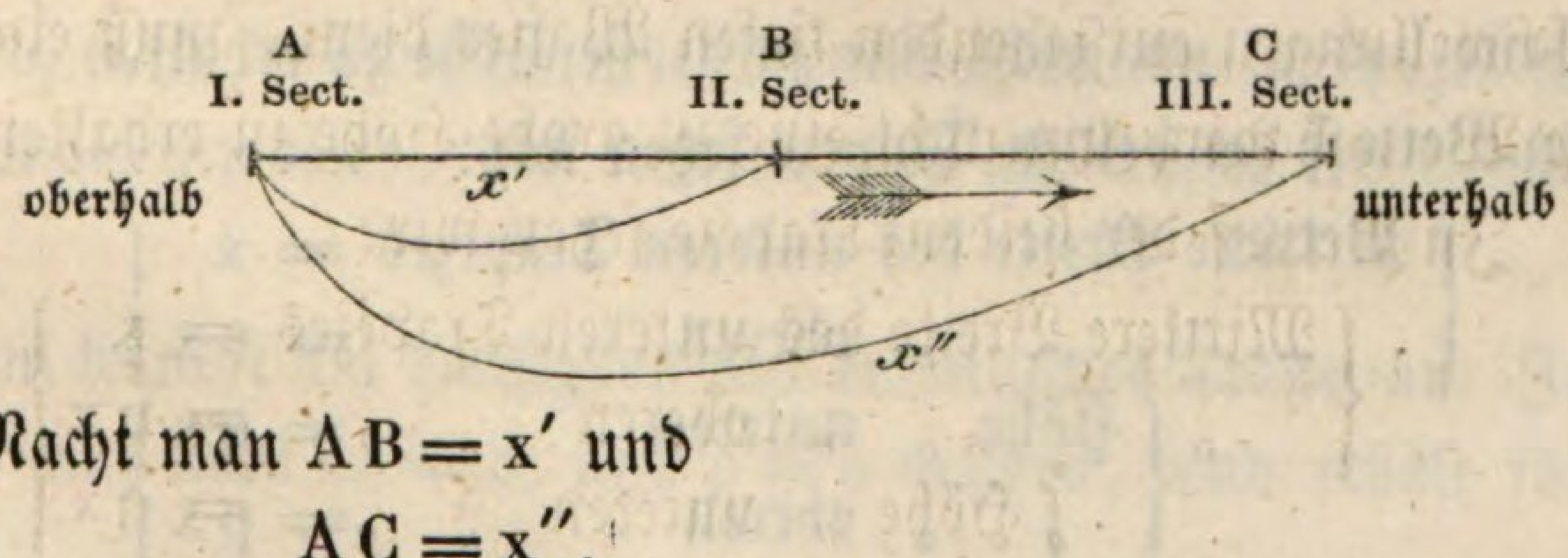
für zwei Beobachtungen

$$n = 2, \text{ und } Q = \frac{2q_{,} - \frac{1}{2}q_{,,}}{\tau},$$

u. s. w.

§ 104. Dritte Methode, sogenannte Methode der Schwimmer. Die Abschlüsse der fließenden Wasser sind oft unthunlich; man muß alsdann zu einer andern Methode seine Zuflucht nehmen. Man wirft in den Wasserzug an der Oberfläche, der die größte Geschwindigkeit hat (gemeiniglich die Mitte des fließenden Wassers) einen schwimmenden Körper, und mißt die Zeit, welche der Schwimmer gebraucht, um einen gegebenen Raum zu durchlaufen. Hieraus schließt man auf seine Geschwindigkeit, welche man zunächst als gleichförmig betrachtet, so wie den Querdurchschnitt des Canals in dem durchlaufenen Raume, und aus dieser größten Geschwindigkeit an der Oberfläche erhält man die mittlere Geschwindigkeit, welche meistentheils $\frac{4}{5}$ der größten ist, oder, genauer genommen, 0,82.

Aber selten kommt es vor, wenn nicht an den von Menschenhand angelegten künstlichen Canälen, daß der Querdurchschnitt auf dem ganzen durchlaufenen Raume gleichförmig sei, und alsdann ist natürlich auch die Geschwindigkeit des Schwimmers eine ungleichförmige. In diesem Falle wendet man folgendes Verfahren an, unter der Voraussetzung indessen, daß die Wand des Bettes nicht unterbrochen und nicht zu unregelmäßig sei. Man wählt drei Durchschnitte, den ersten bei'm Ursprunge A, den zweiten in der Mitte B, den dritten am äußersten Ende C. AC ist der vom Schwimmer durchlaufene Raum.



Macht man $AB = x'$ und

$AC = x''$,

nennt ferner $t_,$ die Zeit, in welcher der Schwimmer AB durchläuft, $t_{,,}$ die Zeit zum Durchlaufen von AC, so ist

$$\alpha = \frac{x_{,} . t_{,,}^2 - x_{,,} . t_{,}^2}{t_{,} . t_{,,}^2 - t_{,,} . t_{,}^2}$$

$$\beta = \frac{x_{,,} t_{,} - x_{,} t_{,,}}{t_{,} t_{,,}^2 - t_{,,} t_{,}^2}.$$

Wenn man nun nach und nach in der Gleichung

$$v = \alpha + 2 \beta t$$

$t = o$, $t = t_{,}$, $t = t_{,,}$ macht,

so erhält man nach einander die Geschwindigkeiten v für die Punkte A, B und C.

Die drei Rechnungen müssen natürlich dieselben Produkte ergeben, wenn das Bett auf der Länge AC kein fremdes Wasser aufnimmt, und hierin hat man ein Mittel, die Richtigkeit der Operation zu verificiren.

Sechstes Kapitel.

Formeln, die sich auf Gestalt und Dimensionen der Querdurchschnitte solcher Canäle beziehen, die zur Aufnahme von Wassermengen bestimmt sind, welche große Veränderungen erleiden.

§ 105. Wenn die Wassermenge, welche auf die Oberfläche des Beckens fällt, großen Variationen ausgesetzt ist, so muß die den Querschnitten der Canäle zu gebende Form sich aus zwei Trapezen mit horizontaler Basis, die eins über dem anderen liegen, zusammensetzen. Das untere Trapez, das als Abfluß-Kuvette für die aus plötzlichen Anschwellungen entstehenden tiefen Wasser dient, muß eine beträchtliche Weite haben, um nicht eine zu große Höhe zu erhalten.

In Betreff der beiden Trapeze setzen wir:

Mittlere Breite des unteren Trapezes $= x$
„ „ „ oberen „ $= nx$

Höhe „ unteren „ $= qx$
„ „ oberen „ $= px$

Breite eines jeden Banketts für die Basis des oberen Trapezes $= m x$
Verhältniß zwischen Basis und Höhe der Böschungen . . . . $= \tau$
Verhältniß der Flächen beider Trapeze zu einander . . . . . $= k$
Umfang der Wasserbedeckung, sobald das Wasser den Querdurchschnitt füllt . . . . $= \chi$
Zur Abkürzung bezeichneten wir

$$\sqrt{1 + \tau^2} = \Theta$$

$$1 + 2m - \tau q + 2(p + q)\Theta = \lambda$$

$$np + q = \mu . \frac{\omega}{\chi} = R \text{ (mittlerer Radius)}$$

Wir erhalten folgende Werthe:
Flächeninhalt des Profils $= \omega = (np + q) x^2 = \mu x^2$.
Umfang des Nassen . . . $= \chi = \{1 + 2m - q\tau + 2(p+q)\Theta\} = \lambda x$.

Man hat demnächst die Gleichung der gegenseitigen Beziehung zwischen den beiden Trapezen $np = kq$.

Man hat ferner
Breite des oberen Trapezes zwischen den oberen Rändern . . . . . $(n + \tau p) x$.
Breite des Trapezes nach der andern Seite, an der Basis . . . . . $(n - \tau p) x = (1 + 2m + \tau q) x$.
Dasselbe für das untere Trapez zwischen den oberen Gränzen . . . . $(1 + \tau q) x$.
Dasselbe für das untere Trapez an der Basis . . . . $(1 - \tau q) x$.

Und endlich die durch den doppelten Ausdruck für die Basis des oberen Trapezes gegebene Gleichung:

$$1 + 2m - n + (p + q)\tau = 0.$$

Man sieht, daß die mittlere Breite des unteren Trapezes als ein Modul angesehen wird, auf welches man alle Theile des Profils bezieht.

Man wendet am häufigsten nur ein einziges Trapez an. In den Formeln muß man $m = 0$, und $p = 0$ machen; und erhält für diesen Fall:

Flächeninhalt des Profils $\omega = qx^2$

Umfang des Nassen . . . $\chi = (1 - q\tau + 2\Theta q)x$

$= [1 + (2\Theta - q)\tau]x$

Mittlerer Radius . . . . $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{qx}{1 + (2\Theta - \tau)q}$

Höhe des Profils . . . qx

Breite des Profils { zwischen den oberen Kanten $(1 + \tau q)x$
an der Basis . . . . $(1 - \tau q)x$.

Siebentes Kapitel.

Bildung der Querprofile der Canäle.

§ 106. Man ist von der Voraussetzung ausgegangen, daß die mittleren Geschwindigkeiten den Quadratwurzeln der Gefälle (oder der Abschüssigkeiten des Bodens) proportionirt seien.

Bezeichnet man die Abschüssigkeit mit I, die mittlere Geschwindigkeit mit U, so hat man die Gleichung

$$U = A\sqrt{I}.$$

Der Werth von A ist kein constanter: ein und derselbe Werth kann nicht allen Formen des Flußbettes entsprechen. Die Schwerkraft hat das Streben, immerfort die Geschwindigkeit zu beschleunigen; die Erfahrung beweist aber, daß in einem Strome die mittlere Geschwindigkeit in jedem Querdurchschnitte constant ist, weil die beschleunigende Wirkung der Schwere in jedem Augenblicke durch gewisse Widerstandskräfte contrebalancirt wird, welche auszuwerthen bleiben.

Um dahin zu gelangen, geht man von den beiden Thatsachen aus:

1°. die Wassertheilchen adhäriren an fast allen Körpern, mit denen sie in Berührung treten;

2°. sie cohäriren unter einander.

Aus diesen beiden Fakten geht die bemerkenswerthe Folgerung hervor: Wenn man in einem Querdurchschnitte eines Canals, wo das Wasser zu einer einförmigen Geschwindigkeit gelangt ist, in der

Ebene dieses Durchschnitts und von dem Punkte aus, wo sich das Molecul mit der größten Geschwindigkeit befindet, einen Radius Vector in willkürlicher Richtung zieht, so werden die Geschwindigkeiten der Molecule, welche sich in der Richtung dieses Radius Vector befinden, beständig kleiner werden, — von dem Punkte des Maximums der Geschwindigkeit bis zum Perimeter des Durchschnitts.

Es folgt daraus, daß, je beträchtlicher die Entwickelung der wasserbedeckten Wand ist, auch ein um so größerer Verlust an bewegender Kraft Statt finden müsse, und je mehr der Wasserzug mit dem Maximum der Geschwindigkeit vom Umfange des Querdurchschnitts entfernt ist, um so weniger wird die Wirkung des Widerstandes an der Wand in der Ausdehnung der flüssigen Masse bemerkbar sein. Es folgt daraus ferner, daß der Ausdruck der mittleren Geschwindigkeit neben dem Flächeninhalte des Querdurchschnitts die Breite des wasserbedeckten Perimeters enthalte. Man hat erkannt, daß der Coefficient A der Gleichung $U = A\sqrt{I}$ von der Form $\sqrt{\frac{g\omega}{a\chi}}$ ist, worin g immer die beschleunigende Kraft der Schwere, ω der Flächeninhalt des Querdurchschnitts und χ die Länge des wasserbedeckten Perimeters (des Querdurchschnitts) ist.

Der Größe $\frac{\omega}{\chi}$ hat man den Namen des **mittleren Radius** gegeben.

Das Vorangehende setzt voraus, daß bei einem und demselben Gefälle, einer und derselben Gestalt und Größe des Querdurchschnitts, der Widerstand einfach dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionirt sei. Die Erfahrung aber zeigt, daß der Ausdruck dieses Widerstandes auch ein Glied enthalten müsse, das die erste Potenz derselben Geschwindigkeit als Faktor hat. Dies gibt die Beziehung:

$$\alpha U + b U^2 = \frac{\omega}{\chi} g I,$$

oder wenn man

$$\frac{\alpha}{g} = \alpha, \text{ und}$$

$$\frac{b}{g} = b, \text{ macht,}$$

hat man

$$\alpha_{,}U + b_{,}U^2 = \frac{\omega}{\chi}\ I.$$

Mit dieser Gleichung muß man diejenige verbinden, welche die Gleichheit zwischen den Wassermengen ausdrückt, die durch die verschiedenen Querdurchschnitte fließen, nämlich

$$q = U\omega.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man die im dritten Kapitel gegebenen her.

q ist das Volum Wassers, welches durch irgend einen Durchschnitt während der Zeiteinheiten α und b der durch die Erfahrung zu bestimmenden Constanten hindurchgeht.

Die beiden obigen Gleichungen drücken die Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit, dem Produkte in Einer Sekunde, die Abschüssigkeit, die Gestalt und Größe des Querdurchschnitts aus.

Für jeden Fall der Anwendung hat man eine gewisse Zahl dieser veränderlichen Größen durch den Stand der Frage gegeben; durch sie bestimmen sich sodann die übrigen Veränderlichen.

Die allgemeine Form des Profils wird durch die Formel des sechsten Kapitels bestimmt, so daß, wenn man die mittlere Breite x kennt, man daraus alle Dimensionen des Profils ableitet.

Die in eine erste Analyse einzuführenden Größen sind nun Q, U, I und x. Die beiden ersteren müssen durch die auf Ort und Stelle gemachten Erfahrungen bestimmt werden, und zur Bestimmung der beiden letzteren, der dritten und vierten, haben wir zwei Gleichungen.

Durch Combinirung der verschiedenen bisher gegebenen Formeln gelangt man leicht zu

$$I = \frac{\lambda(\alpha_{,}U^{\frac{3}{2}} + b_{,}U^{\frac{5}{2}})}{\sqrt{\mu Q}}.$$

$$x = \sqrt{\frac{Q}{\mu U}}.$$

Der Abkürzung halber haben wir in dem Falle zweier Trapeze

$$\lambda = 1 + 2m - \tau q + 2(p + q)\Theta$$

$$\mu = np + q$$

gesetzt; und in dem Falle eines einzigen Trapezes

$$\lambda = 1 + (2\Theta - \tau)q$$

$$\mu = q.$$

Sobald der Werth von x bekannt ist, sind alle andern auf Form und Dimensionen des Querprofils bezüglichen Werthe leicht nach den schon gegebenen Formeln zu berechnen.

Wir wollen nun voraussetzen, daß man als gegebene Stücke die Abschüssigkeit des Bodens und das Produkt Wasser für eine Sekunde ansehe und in diesem Falle die Dimensionen des Querprofils bestimmen müsse, indem man mehrere der Gleichungen aus den vorangehenden Kapiteln combinirt und durch $\underline{\varepsilon}$ die Größe $\frac{\lambda \alpha'}{\mu^2}$ bezeichnet. Man erhält dann folgende Gleichung:

$$x^5 - \frac{\varepsilon}{I} . Q x^2 = \frac{\lambda}{\mu^3 . I} . b_{\prime} . Q^2.$$

Obgleich diese Gleichung vom fünften Grade ist, so kann man sie doch leicht durch Annäherung auflösen, da sie nur zwei Potenzen der Unbekannten enthält.

Die Quadratur des Kreises.

§ 1. Die Quadratur des Kreises kann algebraisch oder geometrisch betrachtet werden: im ersten Falle ist sie rein ideal, d. h. sie besteht nur in unserem Geiste. Im zweiten Falle ist sie physisch, und zugleich unserer Intelligenz wie unseren Organen zugänglich, weil die Geometrie als specielles Objekt die Messung der wirklichen und begränzten Ausdehnung hat, und man sich keine genaue Vorstellung von der Ausdehnung im Allgemeinen machen kann, ohne ihr Gränzen zu setzen und drei Dimensionen zu geben.

§ 2. Die Ausdehnung messen, heißt sie in gleiche Theile zerlegen, und der Zahlenausdruck der räumlichen Ausdehnung ist das abstracte Verhältniß des gesammten Raumes zu der als Maß gewählten Einheit: und für uns heißt, die räumliche Ausdehnung messen, die Basis des gleichen Rechtecks suchen, das zur Breite die Maßeinheit haben muß. Wir nennen dieses Rechteck den Longitudinalwerth der gemessenen Fläche oder des gemessenen Körpers. Es sind also das geometrische Verhältniß der Linie zu ihrer Längeneinheit, der Fläche zu ihrer Flächeneinheit, und des Körpers zu seiner cubischen Einheit, identische Dinge. Diese Art nun, die Größe anzuschauen, erlaubt es uns, die Linie mit der Fläche und mit dem Körper zu vergleichen, obschon diese Dinge heterogen sind, und jede Größe nach Belieben zusammenzusetzen und zu zerlegen. So können das Flächenmaß des Kreises und das des cubischen Inhalts der cylindrischen Scheibe von demselben Durchmesser durch ein und denselben Longitudinalwerth ausgedrückt werden,

wenn die Dicke (die Axe) der Scheibe gleich der Maßeinheit des zugehörigen Kreises ist, weil die Einheit der Dicke oder der Breite in Nichts das Verhältniß der Ausdehnung zu ihrer Maßeinheit ändert, und das Rechteck von 100 Quadratmetern z. B. denselben Längenwerth hat, wie das Parallelepipedum von 100 Cubikmetern.

§ 3. Es ist klar, daß es ein Quadrat gibt, das jedem gegebenen Kreise gleich ist, und daß jede Diagonale eines Quadrats gleich einem gewissen halben Kreisumfange ist; wir werden zeigen, daß die Diagonale des Quadrats, das einem gegebenen Kreise gleich ist, die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem halben Umfange desselben Kreises bildet.

Es habe der Kreis A (Fig. 1, Tafel VI) einen Radius x; π bezeichnet das Verhältniß des Umfangs zum Durchmesser, die Seite des äquivalenten (an Flächeninhalt gleichen) Quadrats wird ausgedrückt sein durch $x\sqrt{\pi}$, und die Diagonale durch

$$x\sqrt{\pi}.\sqrt{2},$$

welche Größe gleich ist der Quadratwurzel aus dem Produkte von πx (dem halben Umfange) mal dem Durchmesser $2x$. Davon überzeugt man sich geometrisch mit Hülfe der Fig. 2.

Es seien $AB = 2x$, $BC = x\sqrt{2\pi}$ (oder die Diagonale des Quadrats B, das gleich ist dem Kreise A), die Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks ABC. Durch Punkt C führe man senkrecht zu AC die Linie CF, welche in F die verlängerte AB schneiden wird; der Abschnitt BF wird der halbe Umfang des Kreises mit x als Radius sein, da die ähnlichen Dreiecke FBC und CBA die Proportion ergeben:

$$BF : BC = BC : BA.$$

§ 4. Die Schwierigkeit reducirt sich also darauf, das Quadrat zu finden, dessen Diagonale die mittlere Proportionale zwischen dem halben Kreisumfange und dem Durchmesser des Kreises ist. Man findet es durch folgendes analytische Mittel auf.

Es sei mit $2r^2$ das Quadrat bezeichnet, das dem Kreise mit

Radius x, welchen wir in einen Kreis mit dem Radius r einschreiben, gleich ist, und durch Y^2 werde das Quadrat bezeichnet, das dem Kreise mit Radius r gleich sei. Wir haben die beiden Beziehungen

$$\pi x^2 = 2r^2, \text{ und } Y^2 = \pi r^2.$$

Eliminirt man r^2 in beiden Gleichungen und zieht die Wurzeln aus, so bleibt

$$\pi x = Y\sqrt{2}.$$

Dies drückt aus, daß der halbe Kreisumfang jedes gegebenen Kreises gleich ist der Diagonale des Quadrats, das eben so groß ist wie der Kreis, den man um das Quadrat von derselben Fläche wie der gegebene Kreis beschrieben hat, oder auch: daß der Umfang jedes Kreises gleich ist dem Umfange des Quadrats, das die halbe Fläche des Kreises ist, welcher in das dem gegebenen Kreise gleiche Quadrat eingeschrieben wird.

Wir kommen zu demselben Resultate durch geometrische Construction (Fig. 2), indem wir $AB' = BC$ nehmen, und $B'C' = BF$, um die rechtwinkeligen Dreiecke $AB'C'$ und $C'B'F'$ zu bilden, welche

$$B'F' : B'C' = B'C' : B'A$$

ergeben.

§ 5. Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß nach dem Ausdrucke πx^2, und den vorangehenden Constructionen, wenn der Durchmesser von π gleich 1, oder eins der Glieder der decimalen Progression ist, $\frac{\pi}{2}$ nothwendig den zehnten Theil des Längenwerthes der Kreisfläche ausdrückt, weil der vierte Theil der Peripherie mal dem Durchmesser die Fläche hervorbringen soll; d. h. daß $\frac{1}{2} BF . 10 = BF . 5 = \pi x^2 . 1$; in andern Worten, daß der Längenwerth des Flächeninhaltes durch 100 . 1 ausgedrückt werden kann, der des Kreisumfanges durch 40 . 1, und der des Verhältnisses von Peripherie zum Durchmesser durch 4 . 1. Dies bemerkenswerthe Resultat wird durch die geometrischen

Constructionen in Fig. 3 und 4 anschaulich, die äquivalent und eine jede in 100 gleiche Theile subdividirt sind. *)

§ 6. Da jede wirkliche Größe das Produkt von drei Dimensionen ist, deren zwei die Maßeinheit repräsentiren (§ 2), so ist es einleuchtend, daß zwei unähnliche Polyeder, welche dieselbe Axe und dasselbe Volum haben, nothwendig eine gleiche Grundfläche haben müssen. Wenn wir nun voraussetzen, daß die cylindrische Scheibe A (Fig. 5) dieselbe Axe und dasselbe specifische Gewicht habe, wie das Polyeder B (Fig. 6), so müssen ihre Grundflächen nothwendig äquivalent sein. Die Theorie lehrt uns nun, jedes Polyeder in ein ihm gleiches rechtwinkeliges Parallelepipedum zu verwandeln; kann also die Basis des genannten Polyeders (Fig. 6) auf das ihr gleiche Quadrat aefg zurückgeführt werden, so wird dieses selbe Quadrat noch dem Kreise (Fig. 5) gleich sein, und zugleich seine Quadratur vorstellen, was wir beweisen wollten.

§ 7. Man braucht nicht hinzuzufügen, daß, da in ähnlichen Figuren die homologen Seiten proportionirt sind, man nach Belieben zu allen Umformungen übergehen kann, wie man will, vom Kreise zum Quadrat und vom Quadrat zum Kreise, mittelst einer geometrischen Construction, die gleichsam den Typus bildet, ähnlich der in Fig. 3, welche aus der Verbindung des Diameters der cylindrischen

---

*) Das Rechteck MN stellt den Längenwerth des Kreises vor, d. h.

$$\pi x^2 \cdot \frac{2x}{10} = 100 . 1.$$

Das Rechteck Nψ stellt den Längenwerth des Kreisumfanges vor, d. h.

$$2\pi \cdot \frac{2x}{10} = 40 . 1.$$

Das Rechteck Nφ stellt den Längenwerth des Verhältnisses der Peripherie zum Durchmesser vor, d. h. $\frac{2\pi}{10} \cdot \frac{2x}{10} = 4 . 1.$

Das Rechteck abcd, gebildet aus dem Durchmesser und $\frac{1}{4}$ Peripherie, drückt die genannten 100 gleichen Theile des Rechtecks MN aus.

Das Quadrat aefg endlich, über der Wurzel des Flächeninhalts construirt, drückt noch eine äquivalente Subdivision aus 2c. 2c.

Scheibe (Fig. 5) mit der Diagonale des ihr gleichen Quadrats (Fig. 6) abgeleitet ist.

Wichtige Aufgaben, die geometrisch sich mit Lineal und Zirkel, und ohne arithmetische Operationen, lösen lassen.

1°. Die Cubikwurzel, den Durchmesser und den Umfang der in einen geraden Cylinder eingeschriebenen Kugel zu finden, wenn jener eine Grundfläche von 1,293 Quadratmeter hat.

2°. Den Durchmesser, den Umfang und die Quadratur der ganzen Oberfläche desselben Cylinders zu bestimmen.

3°. Den Durchmesser, den Umfang und die Quadratur der ganzen Oberfläche der vorerwähnten eingeschriebenen Kugel zu bestimmen.

4°. Den Durchmesser, den Umfang und die Quadratur der gesammten Oberfläche des in denselben Cylinder eingeschriebenen Kegels zu bestimmen.

Auflösung.

1°. Da die in den geraden Cylinder eingeschriebene Kugel und der Kegel verschiedene gemeinsame Elemente der Zusammensetzung haben, und die vier Probleme, welche sich darauf beziehen, nur ein einziges dieser Elemente haben, so ist es klar, daß man die fehlenden unbekannten Elemente nur mittelst ähnlicher Figuren bestimmen kann, d. h. mittelst einer typischen Construction, ähnlich wie Fig. 3 sie bietet.

Wenn man demzufolge von dem in § 2 aufgestelltem Factum ausgeht, daß jede Flächengröße durch ein ihr gleiches Rechteck dargestellt werden kann, so wird die Basis des zu construirenden Polyeders durch ein Rechteck (Fig. 8) dargestellt werden können, das 1,293 Meter Basis und 1,00 Meter Breite hat ($1^m,293 \times 1^m,00$), und das geometrische Mittel zwischen Basis und Höhe dieses Rechtecks wird nothwendig die Cubikwurzel der in erwähntes Polyeder eingeschriebenen Kugel sein. Ueberträgt man dann die Diagonale des Quadrats dieser Wurzel auf die Linie BC unserer typischen Construc-

tion (Fig. 3), und zieht die Parallelen C″A″ und C″F″, so beschreiben wir über der Basis A′F′, nach rechts den Durchmesser = BA″, und nach links, die halbe Peripherie = BF″, des größten Durchschnitts der Kugel und der Basis des zu construirenden Cylinders (Fig. 7.)

Diese geometrische Construction kann natürlich nach dem proportionalen Maßstabe ausgeführt werden, welchen man wählen will. (Fig. 9.)

2°. Die ganze Oberfläche des Cylinders ist gleich dem sechsfachen Flächeninhalte der Basis, wir werden deshalb die Wurzel erhalten, wenn wir das geometrische Mittel zwischen dem Dreifachen der Wurzel der Basis und dem Doppelten derselben Wurzel nehmen; — und indem man so weiter operirt, wie man es in dem vorangehenden Beispiele gethan hat, beschreibt man die gesuchten Durchmesser und Umfang. (Fig. 10.)

3°. Die ganze Oberfläche der in denselben Cylinder eingeschriebenen Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte des größten ebenen Durchschnitts; es ist demnach klar, daß, da die Flächen sich zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer homologen Seiten, das Doppelte der Wurzel des größten Schnitts die Wurzel der ganzen Oberfläche vorstellen wird, aus welcher Wurzel man ebenfalls den Durchmesser und den Umfang des dem Quadrate dieser Wurzel gleichen Kreises ableitet (Fig. 11).

4°. Da endlich die ganze Oberfläche des in den geraden Cylinder eingeschriebenen Kegels die Hälfte der gesammten Oberfläche der eingeschriebenen Kugel ist, so erhalten wir die Quadratwurzel, indem wir die Wurzel der Oberfläche der Kugel als die Diagonale von dem Quadrate der Wurzel der Oberfläche des genannten Kegels ansehen, weil das Quadrat der Diagonale das Doppelte von dem auf der Seite desselben Quadrats construirten Quadrats ist (Fig. 12).

Anmerkung. Diese Entdeckung datirt vom Monate Mai 1813.

Eine gedruckte Note darüber ist im Juni 1821 in der Bibliothek zu Paris deponirt, und in den Jahren 1848 und 1849 in Rom (in 3 Ausgaben) veröffentlicht worden.

[illegible] und die Quadranten $C'A'$ und $C'A''$ [illegible] der Platte $A'C'$, [illegible] den Durchmesser [illegible] nach [illegible] die halbe Peripherie — [illegible] der größten [illegible] [illegible] in Continuum [illegible] (Fig. 7.)

[illegible] geometrische Construction kann natürlich [illegible] [illegible] (Fig. 9.)

[illegible] Die ganze [illegible] Axendurchschnitt der Platte, [illegible] werden und [illegible] der Platte [illegible] ben man in [illegible] (Fig. 10.)

[illegible] Die ganze [illegible] [illegible] Finger ist gleich dem [illegible] mit Ein[illegible] [illegible] Oberfläche der [illegible] [illegible] Durchmesser und [illegible] dem Winkel gleich (Fig. 11.)

[illegible] die ganze [illegible] [illegible]

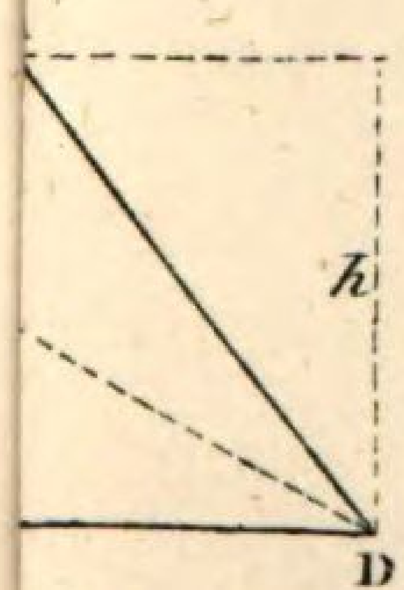
[illegible]



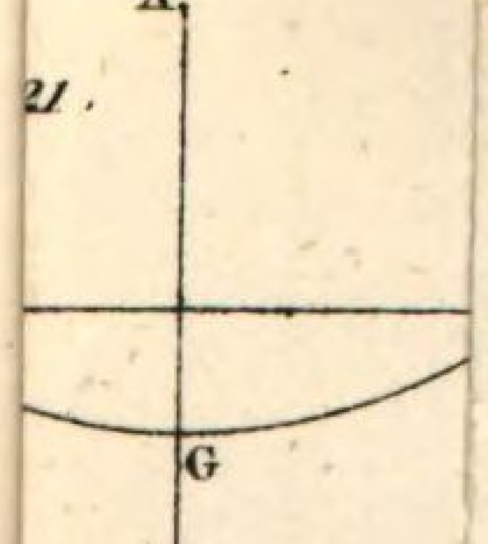


Fig. 12.





21.



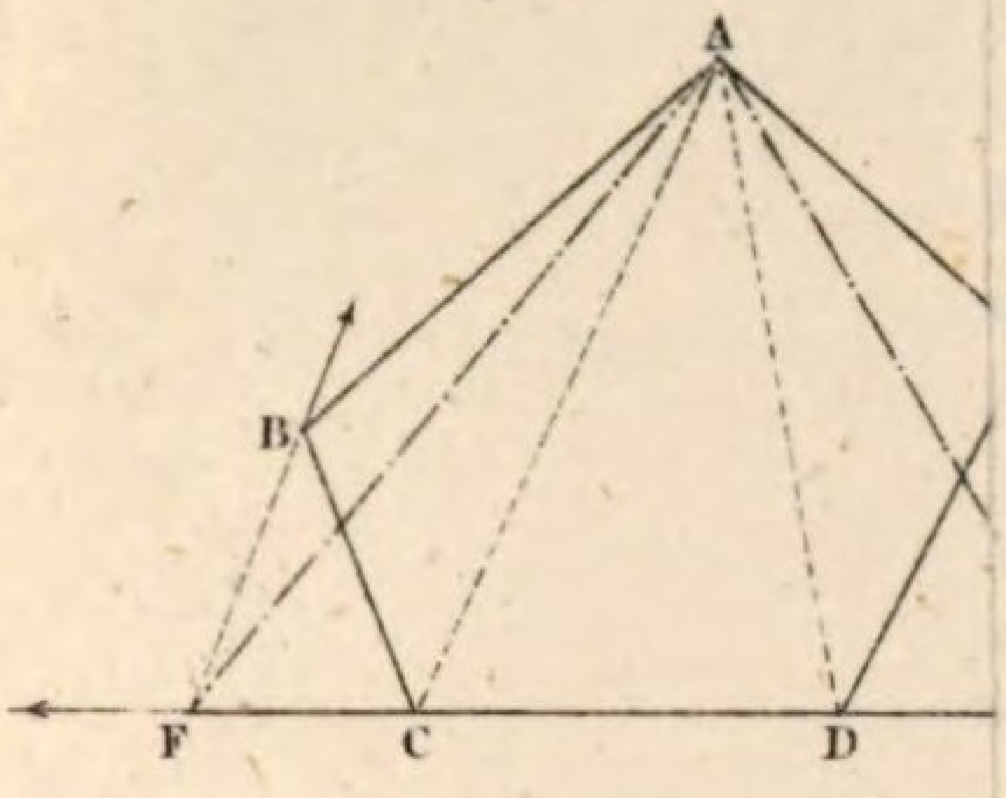
Fig

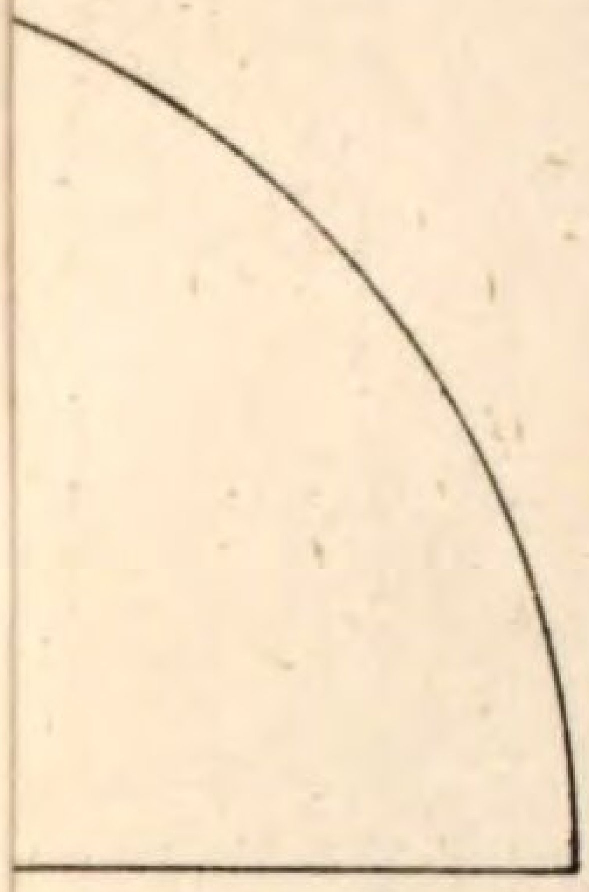


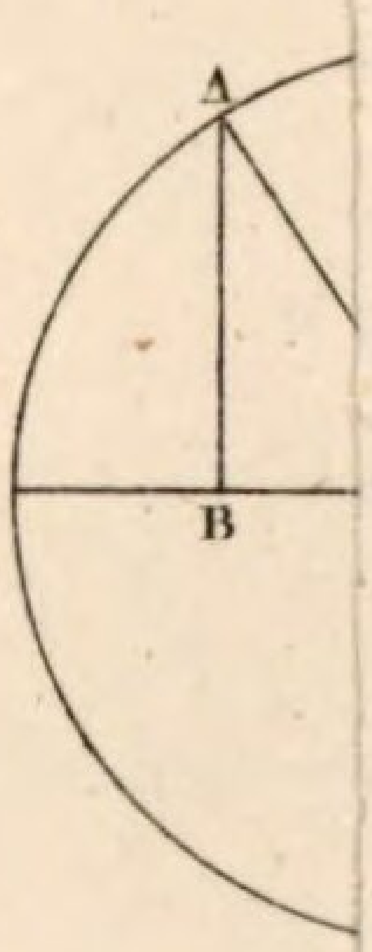
39.

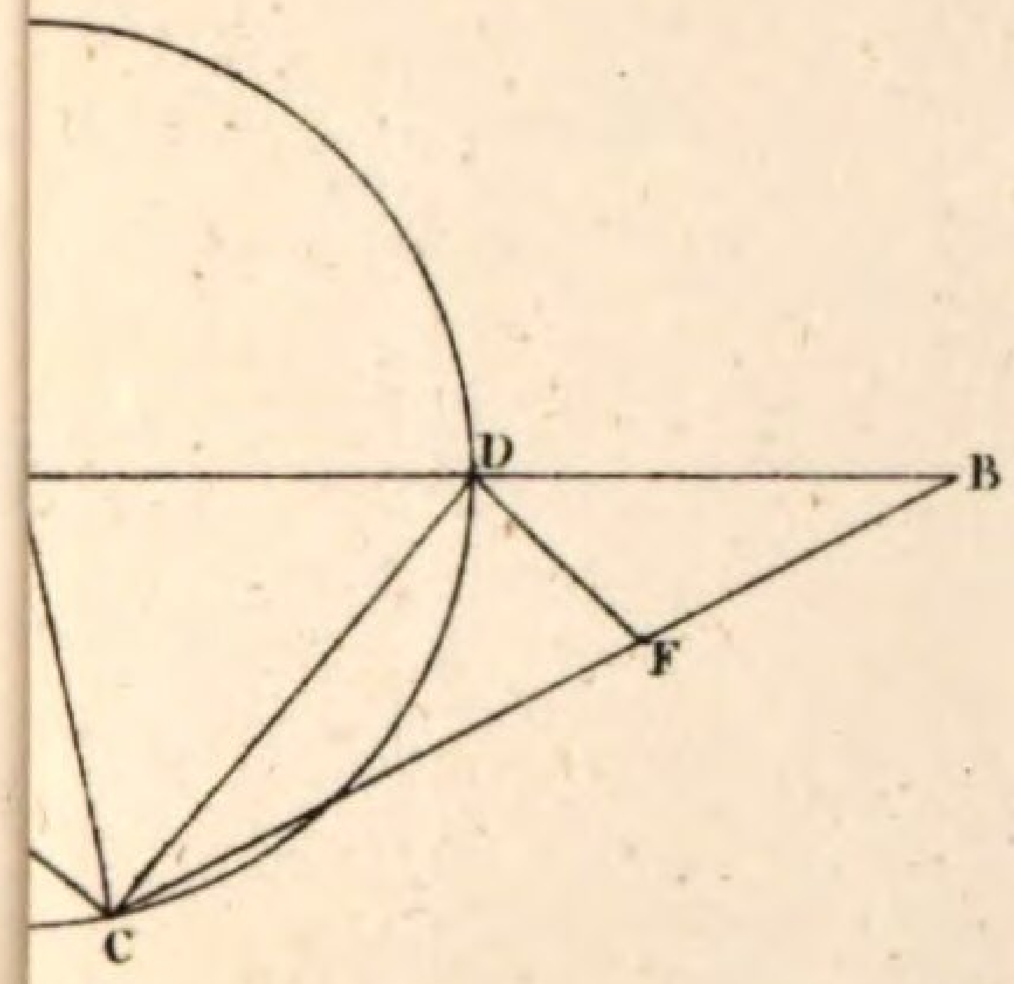


Fig. 43. b









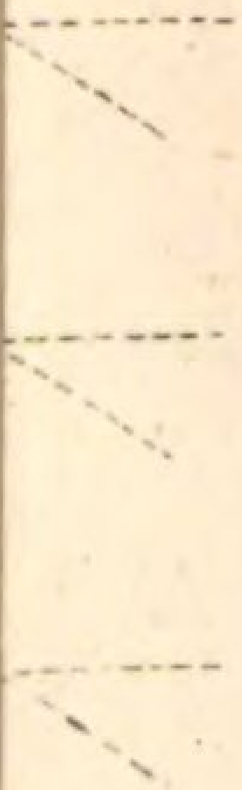
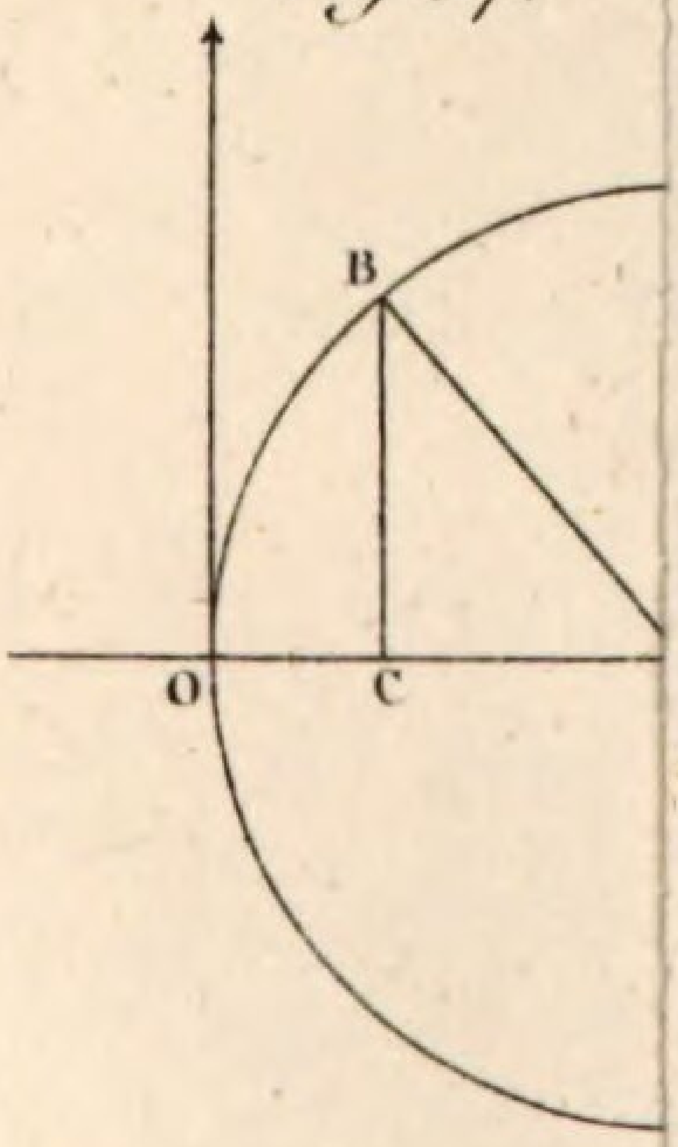


Fig. 57.



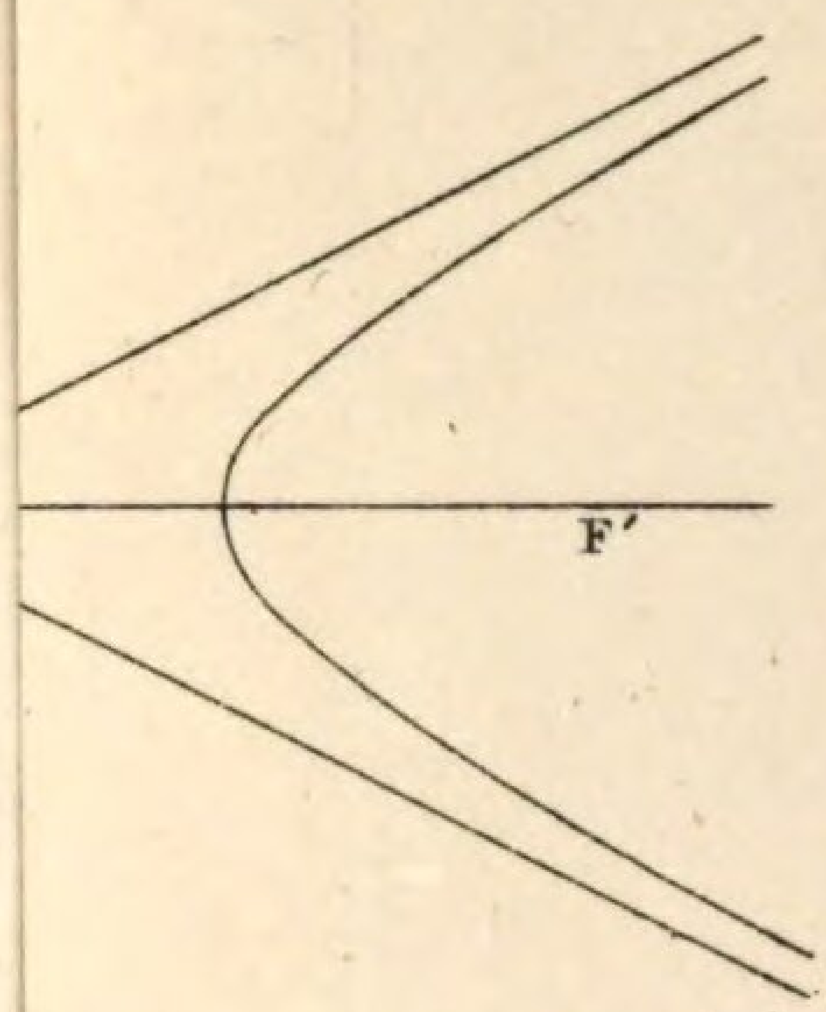


Fig. 65.

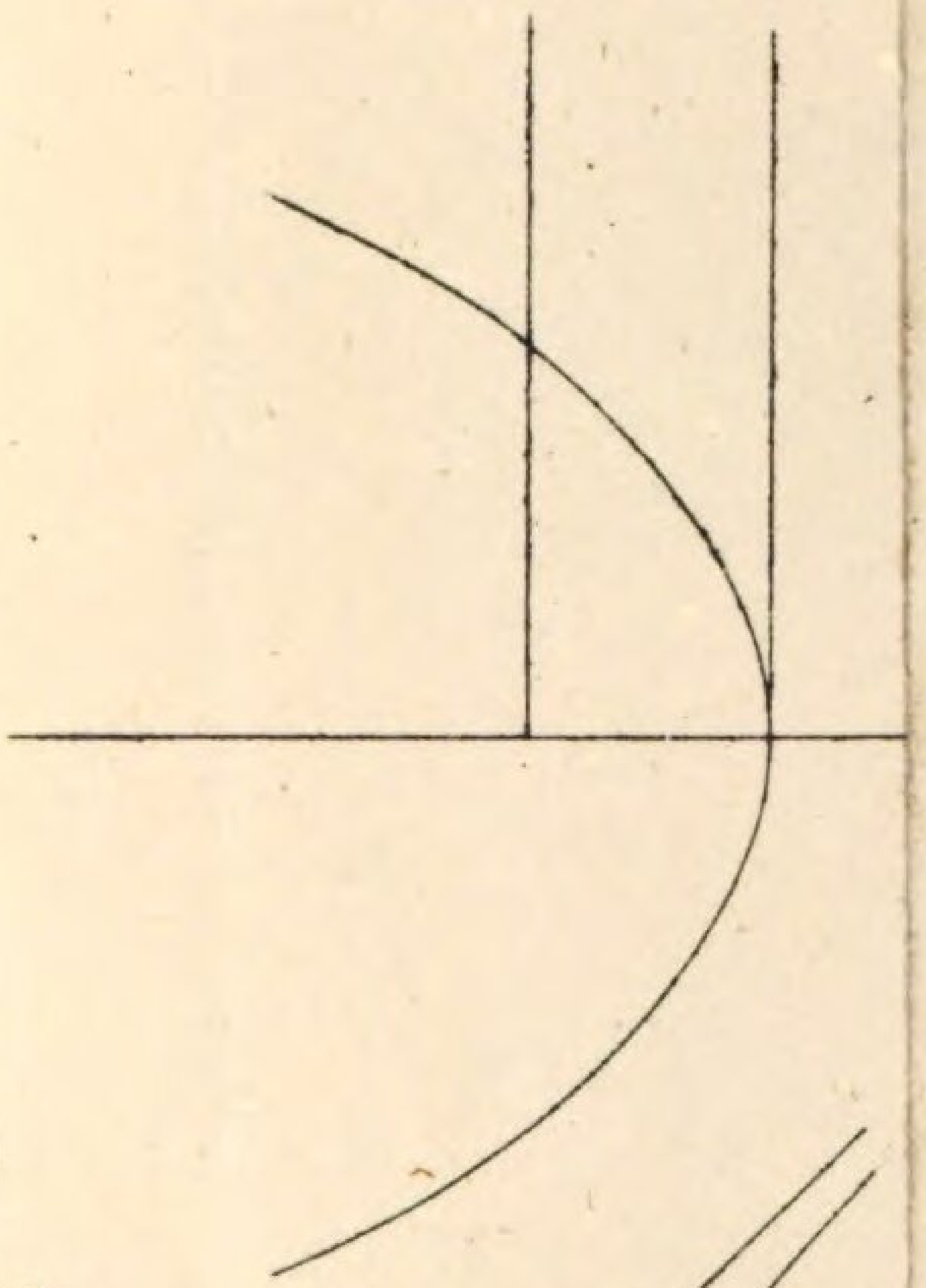
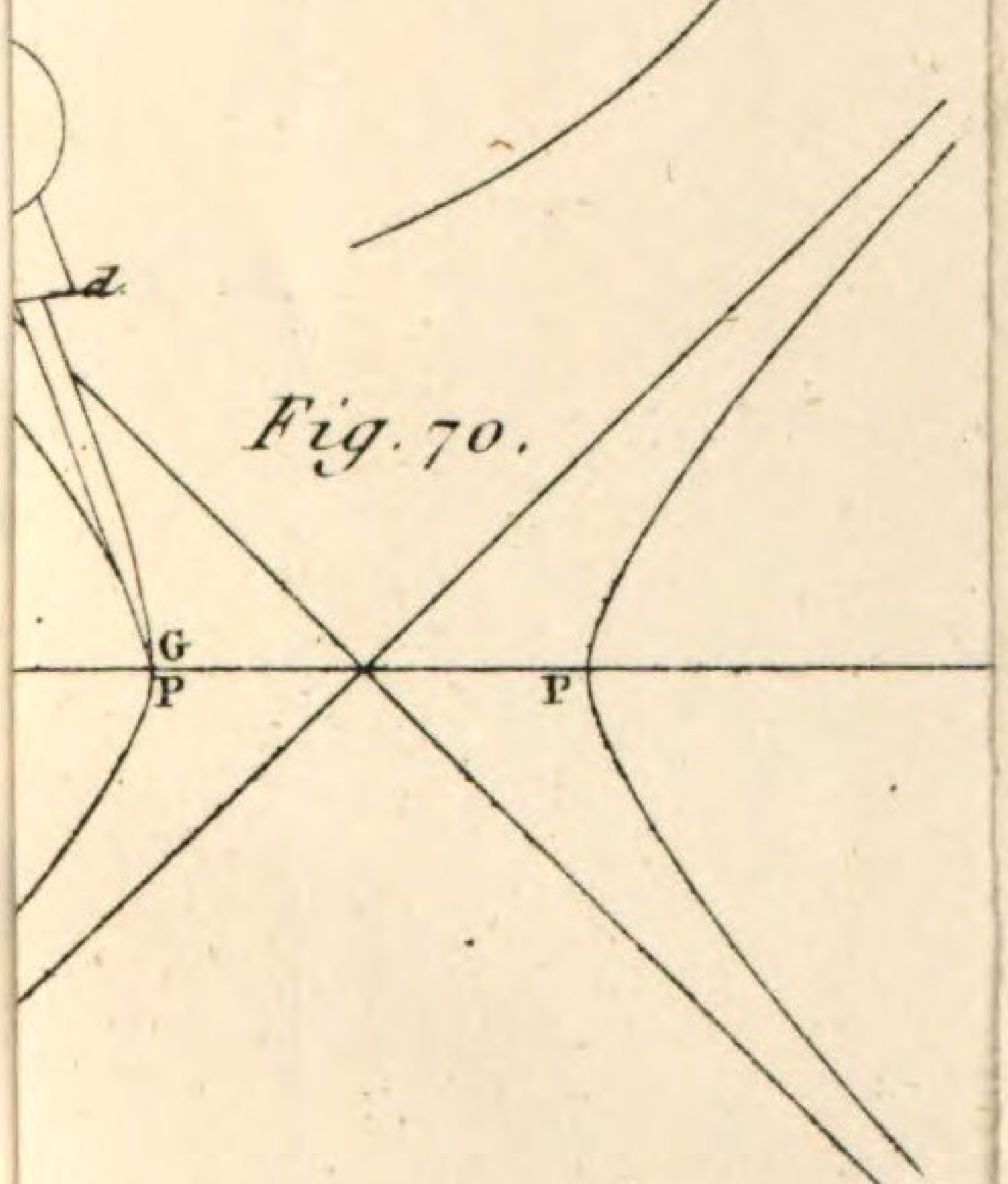


Fig. 70.





Im Ganzen 334 m 6

2 Im Ganzen 386 m


Fig. 1.

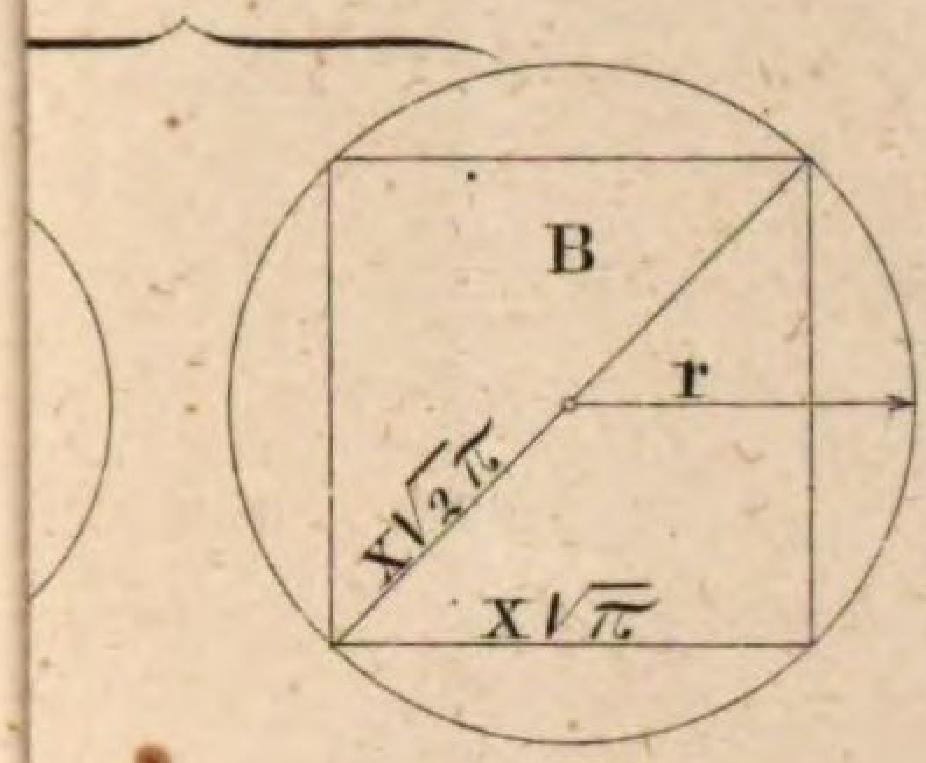
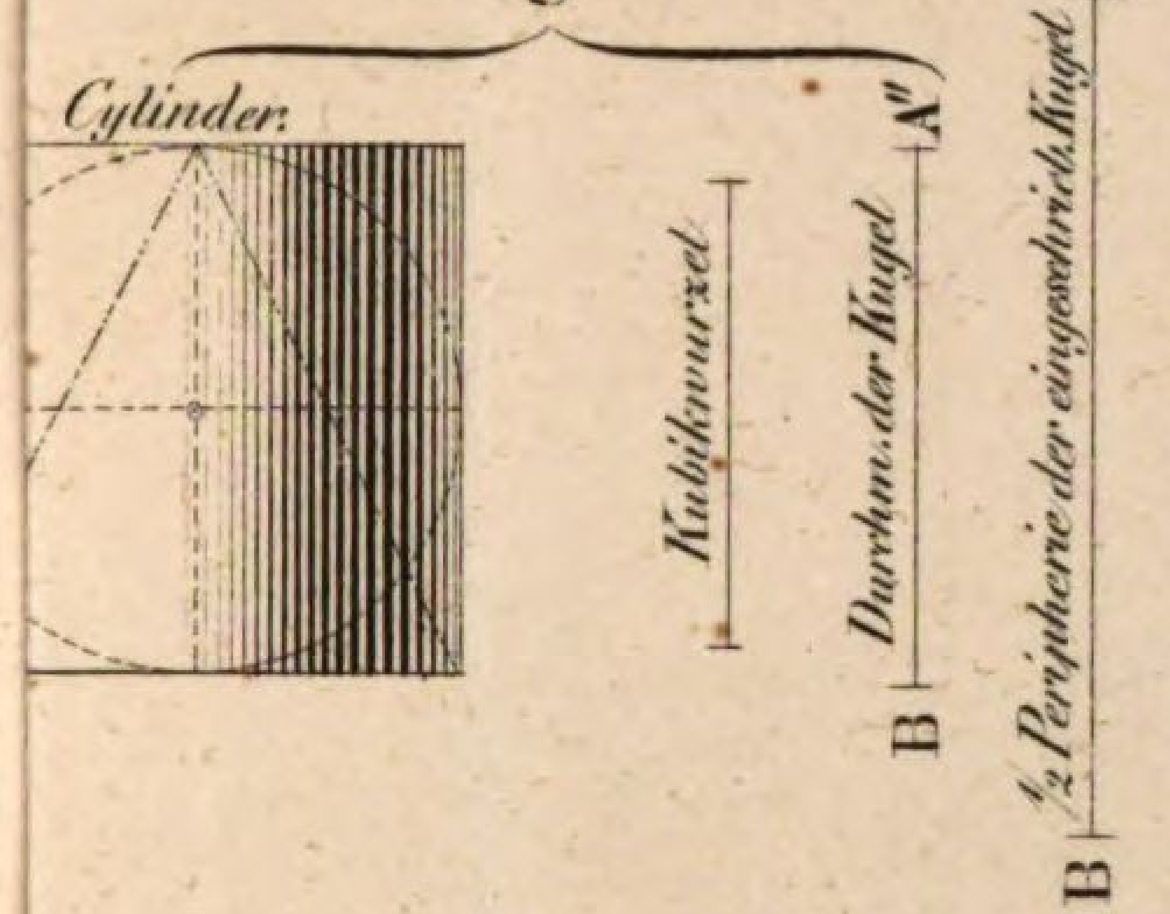


Fig. 7.



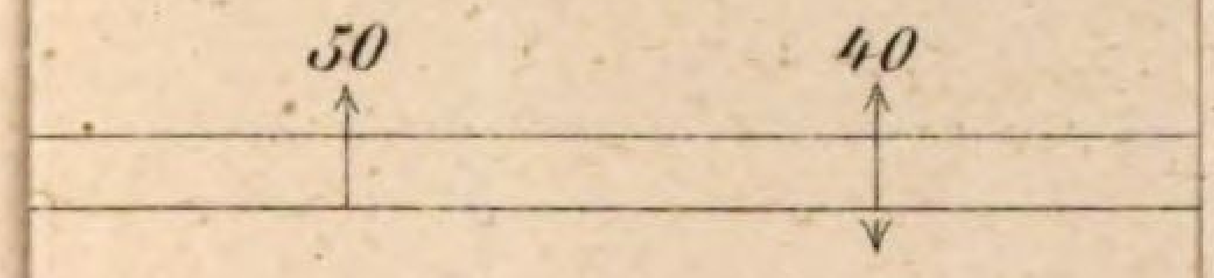
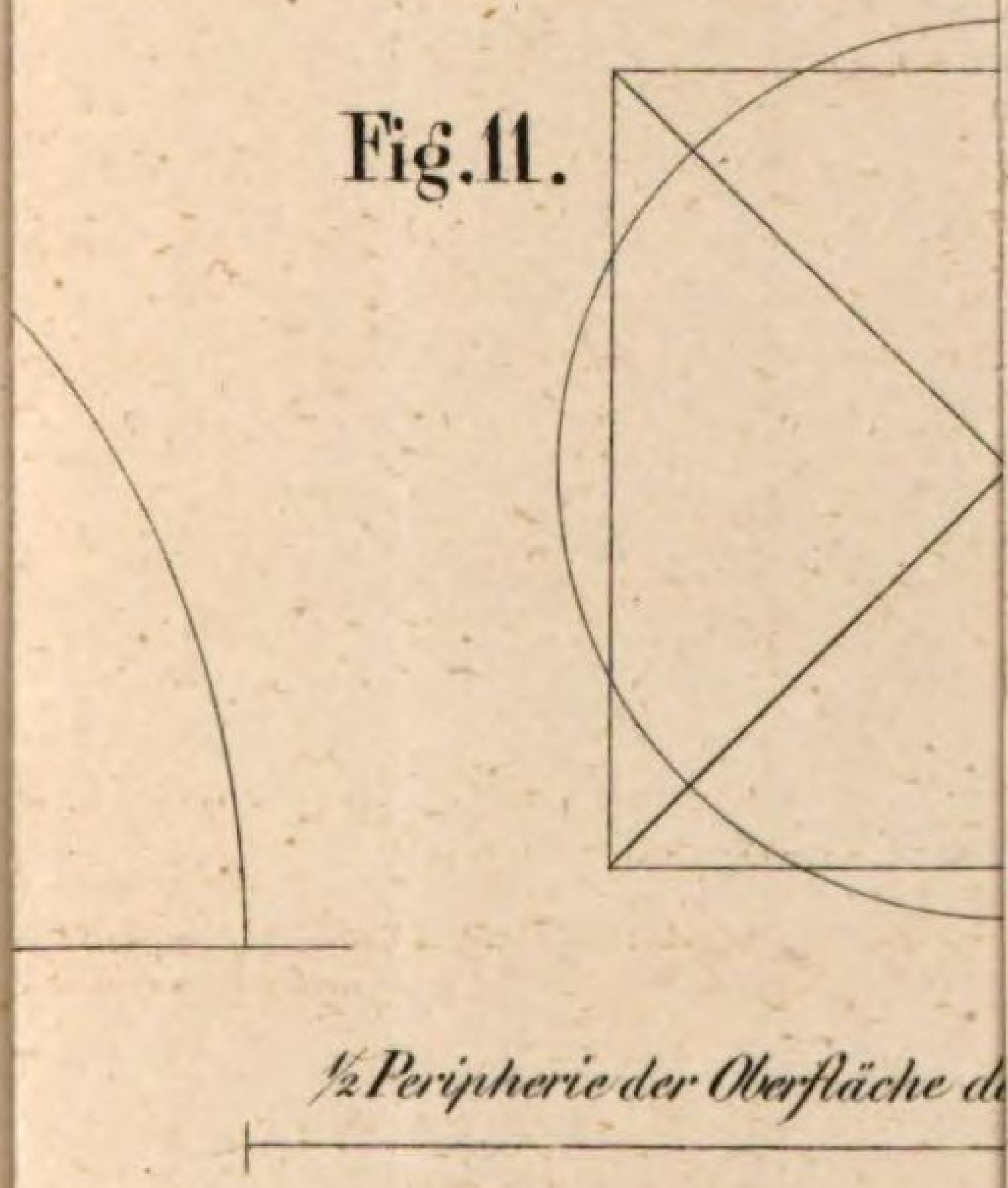
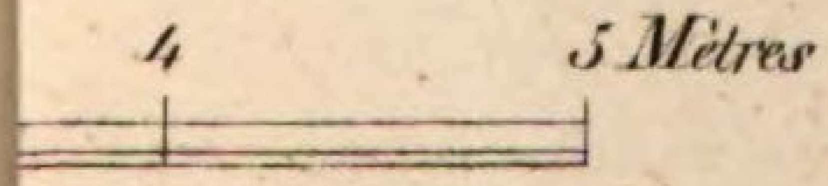


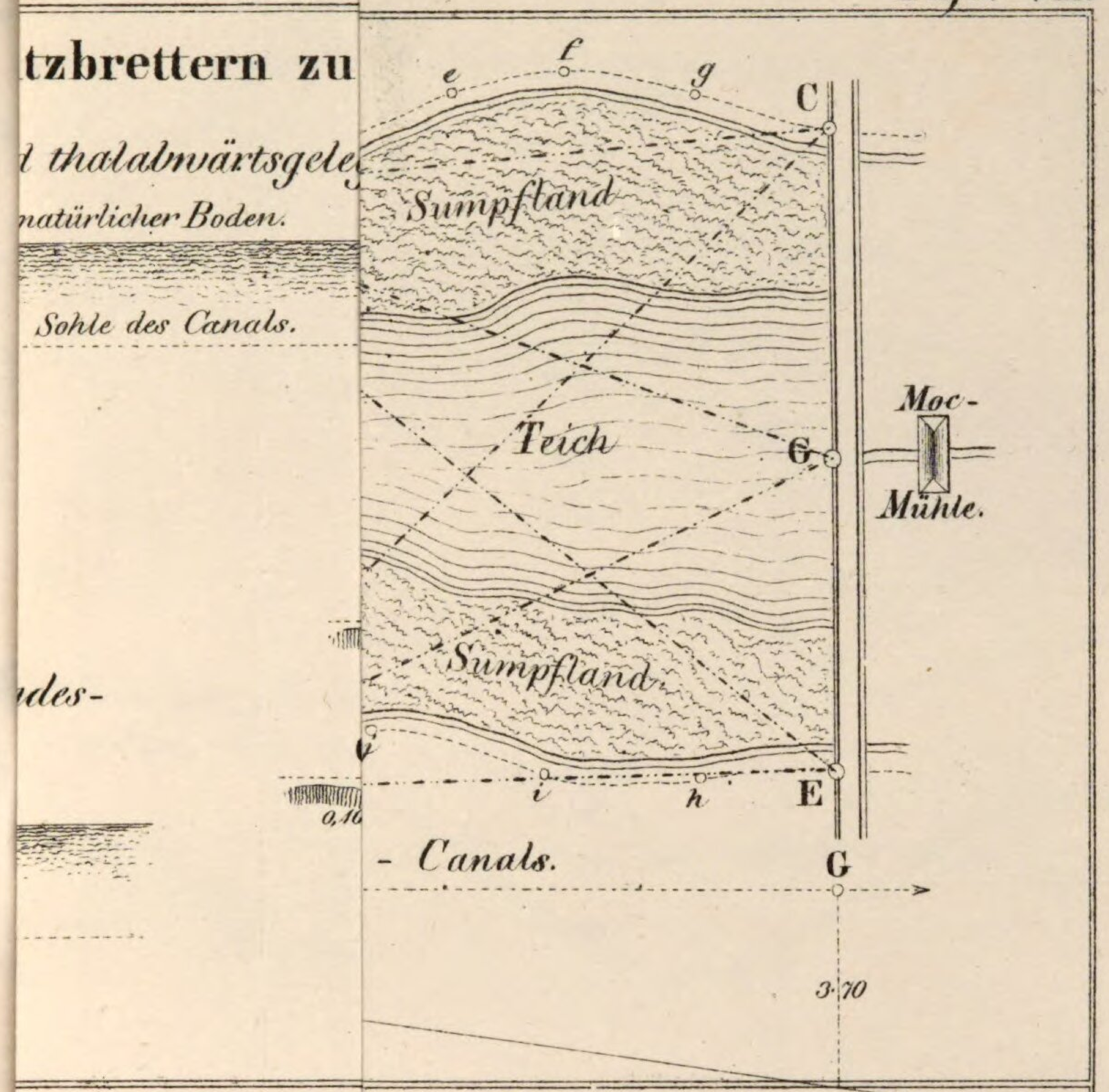
Fig. 11.

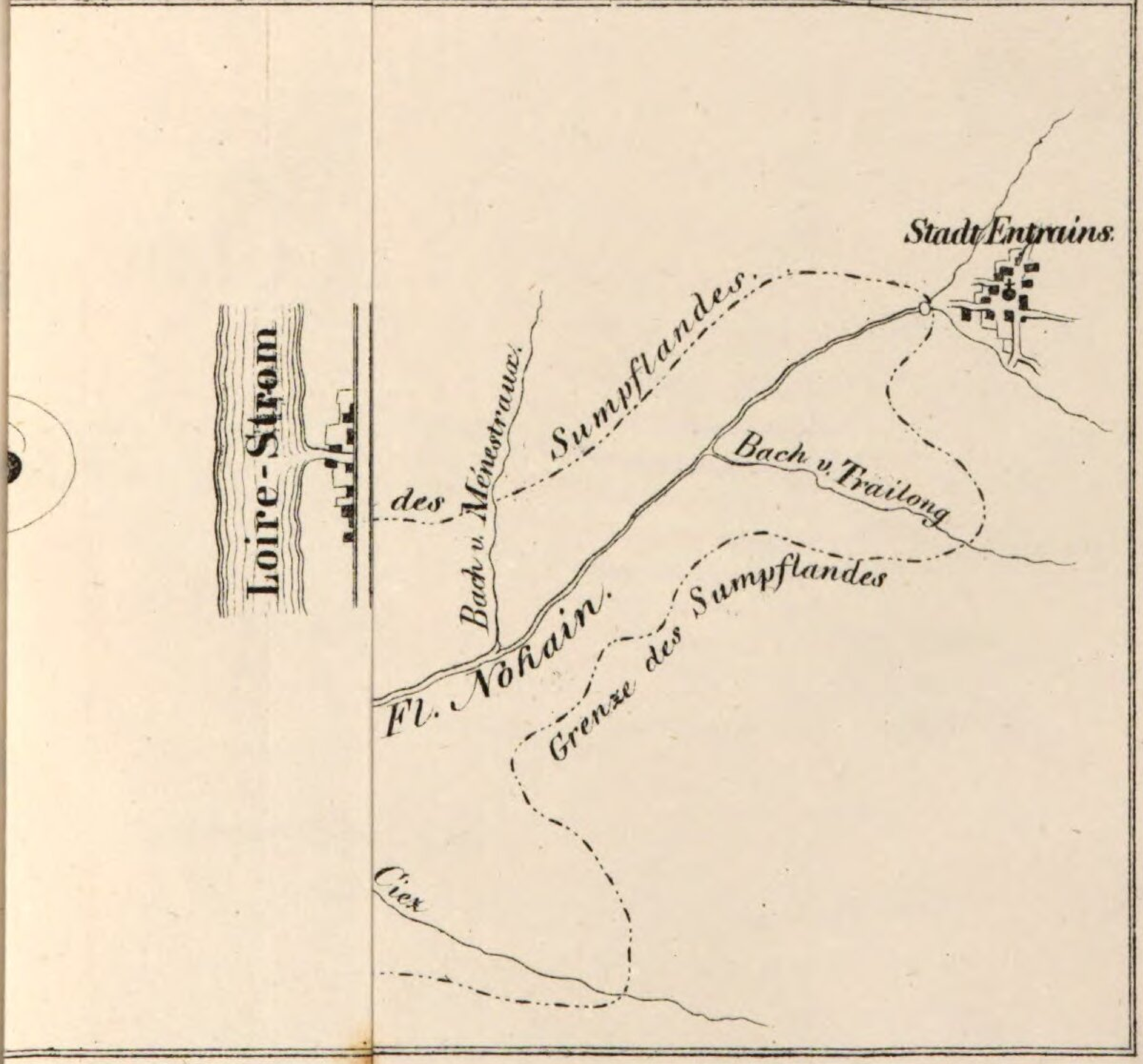



.9.




Tafel VII.


tzbrettern zu
d thalabwärtsgele
natürlicher Boden.
Sohle des Canals.
ndes-
e
f
g
C
Sumpfland
Teich
G
Moc-
Mühle.
Sumpfland
i
h
E
0,16
G
- Canals.
G
3·70


Stadt Entrains.
Sumpflandes.
Loire-Strom
des
Bach v. Ménestrauz.
Bach v. Trailong
Fl. Nohain.
Grenze des Sumpflandes
Ciex


ntw
13/15
1:25
ufriſs
1:25
25/20
1:25

ntw



De la Haye

Laur, Jean A.

Vereinfachte und vervollkommnete praktische Geodäsie zum Gebrauche der Civil- und Militär-Ingenieurs, des Brücken- und Wege-Baues, des Bergwerkswesens, der Geometer des Katasters ...
Bd.: 1

Leipzig 1857